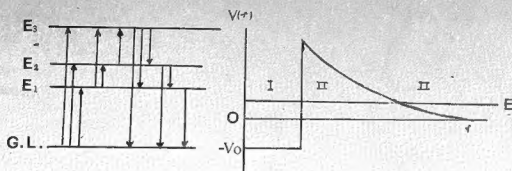


ميكانيكا الكم

الجزء الأول



تأليف

دكتور محمد عبد الرحمن قنديل
أستاذ الفيزياء النووية والطاقة العالية
كلية الهندسة

دكتور محمد عبد الحاميد العزوي
أستاذ الفيزياء النظرية
كلية التربية

بجامعة عين شمس

الطبعة الأولى

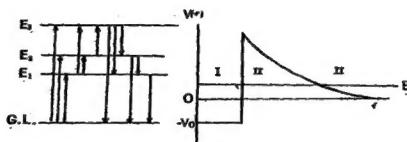
١٩٨٩

حقوق الطبع محفوظة لدى المؤلفين

دار الحكيم للطباعة

ميكانيكا الكم

الجزء الأول



تأليف

أستاذ الفيزياء النظرية والطاقة العالية
كلية الهندسة

أستاذ الفيزياء النظرية
كلية التربية

بجاية عين شمس

المجلد الأول

١٩٨٩

حقوق المسح محفوظة لدى المؤلفين

دار الحكيم للطباعة

بسم الله الرحمن الرحيم

وهو تكميل

مقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين • وتشكره سبحانه وتعالى ان وقفنا لتقديم هذا الكتاب " ميكانيكا الكم - الجزء الاول " • وهو الثاني نسي سلسلة الكتب التي تعالاه تعالى أن يساعدنا في انسابها لتزويد القارئ العربي بكتب عربية علمية على المستوى الجامعي •

ومرة أخرى راعينا ان نقدم هذا الكتاب باللغة العربية مع الابقاء على المعالجات الرياضية والقوانين الفيزيائية بحروف اللغة الانجليزية وذلك لسببين :
أولهما : ان تساعد القارئ على الاستفادة من المراجع الاجنبية المتاحة •
ثانيهما : ان المؤلفات العلمية الاجنبية على اختلاف اللغة المستخدمة في كتابتها تتركز المعالجات الرياضية بحروف اللغة الانجليزية •
وتأمل باذنه تعالى ان يحظى القارئ العربي الفائدة المرجوة من وراء كتابه هذا المؤلف بهذه الصورة •

ويبدأ الكتاب بمعرفنا بالاساس الفيزيائي لنظرية ميكانيكا الكم بداية من مفهوم الكم الاعمالى الذى ادخله العالم بلانك ووفق به لفرن الطيف الكهرومغناطيسى للاشعاع الصادر من الجسم تام السواد وكيف ان دى بولى استخدم وجهة النظر الخاصة بالتناثر بين الطاقة وإعادة (كتبتة من نتائج النظرية التسمية الخاصة لأينشتين) للتصرف على الخواص الموجية للجسيمات المادية • والصلة بين الحزمة الموجية لتلك الموجات وبين الجسيم المادى نفسه • وتطور ذلك الى مبدأ الالتصديق لهايزنبرج •

وفي الباب الثانى يتم توضيح " بطريقة مبسطة بقدر الامكان " كيفية الوصول الى المعادلة الاساسية لنظرية ميكانيكا الكم وهي معادلة شرودنجر والاعارة الى تاتيسز

به تلك المعادلة وامتيز به الدقة الرجعية التي تتطلبها تلك المعادلة •

في الباب الثالث نعرض بعض الخصائص العامة للعبارات الخطية في ميكانيكا الكم وتلك العبارات ترجع أهميتها الى انها ما يقابل الكميات الفيزيائية المعروفة كتفسيرات ديناميكية •

ثم في الباب الرابع نوضح بعض التطبيقات المبسطة لاستخدامات معادلات شرودنجر في معالجة بعض الظواهر الفيزيائية مثل حركة جسيم حر وحركة حزمة تجاه سلة جهدية والتأثير النفقي •

اما الباب الخامس فتفرد له معالجة موضوع التذبذب التوافقي البسيط بينما الباب السادس يختص بمعالجة موضوع الذرات شبيهة ذرة الايدروجين •

وفي الباب السابع نوضح المعالجات التقريبية المعروفة باسم نظرية الاطلاق ولكن في أبسط صورها •

والكتاب يشتمل على عدد واحد وخمسين مثال محلولة وزعت في آخر كل باب وراعينا في تنوعها تعميق المفهوم الفيزيائي الذي نود تبيانته في مكانه •

والكتاب ينتهي بثلاث تذييلات (Appendices)

التذييل الاول يعطى قيم بعض الثوابت الفيزيائية التي ورد استخدام بعضها في هذا الكتاب •

والتذييل الثاني لمحة عن مجيئة من العلماء البارزين الذين اسهموا في تشكيل اطار نظرية ميكانيكا الكم •

اما التذييل الثالث فيعطي قائمة ببعض الكتب التي استعان بها المؤلفان لتقديم هذا الكتاب "ميكانيكا الكم - الجزء الاول" •

والله سبحانه وتعالى هو وحده ولي التوفيق •

المؤلفان

٢٦ شعبان ١٤٠٩ هجرية
٣ ابريل ١٩٨٩ ميلادية
محمد عبد الهادي العدوي و عبد الرحمن تكري
جامعة عين شمس بالقاهرة

(ب)

فهرس

رقم الصفحة

أ

مقدمة

١ الباب الاول : تشأ ميكانيكا الكم

١ ماهي ميكانيكا الكم

١ الأساس الفيزيائي لميكانيكا الكم

٣ بعض خصائص موجات دي برولي

٥ تكون الحزمة الموجية لموجات دي برولي

٨ العلاقة بين سرعة الجسم وسرعة الحزمة الموجية

١١ مبدأ الالتحديد لهايزنبرج

١٤ مثال (١-١) الى مثال (١٦-١)

٣٠ الباب الثاني المعادلة الموجية لدالة الحالة

٣٠ معادلة شرودنجر

٣٩ شحج كثافة تيار الاحتمال

٤٢ مثال (١-٢) الى (٧-٢)

٥١ الباب الثالث المعاملات الخطية في ميكانيكا الكم

٥٢ مثال (١-٣) الى (٣-٣)

٥٤ اقواس براون في ميكانيكا الكم

٥٥ مثال (٤-٣)

٥٦ المعاملات الخطية العكسية لكتبة الحركة الخطية

٥٨ مثال (٥-٣) الى (٦-٣)

رقم الصفحة

٦١	مركبات كمية الحركة الزاوية في الاحداثيات الكمية
٦٤	مثال (٧-٣) الى (١٣-٣)
	الباب الرابع استخدام معادلة شرودنجر في معالجة بعض الظواهر
٧١	التيقضية :
٧١	المرتبطة بحركة جسيمات داخل حيزه حواجز جهدية
٧١	حركة جسيم حر
٧٣	حركة جسيم داخل صندوق مغلق
٨٠	درجة عدم الانتظام
	حركة جسيم (أو حزبة من الجسيمات) تجاه حاجز
٨٣	جهدي (سلسلة جهدية)
٨٥	الحالة الاولى
٨٨	الحالة الثانية
	حركة جسيم (أو حزبة من الجسيمات) تجاه هضبة
٩١	جهدية (تأثير النفق)
٩٧	مثال (١-٤) الى (١٢-٤)
١٢١	الباب الخامس المعالجة الكمية للتذبذب التوافقي البسيط
١٢٧	القيم الأيجينية لطاقة التذبذب التوافقي
١٢٩	الدوال الذاتية لتذبذب توافقي بسيط
١٣١	مثال (١-٥) الى (٢-٥)
١٣٦	الباب السادس المعالجة الكمية لجسيم يتحرك في مجال قوة مركزية
١٣٦	مجموعات شبيهة ذرة الايدروجين

رقم الصفحة

١٤٨	معادلة ليجندر المرتبطة
١٤٩	دوال لجندر المرتبطة
١٥٥	مثال (١-٦)
١٥٩	الباب السابع المعالجات الرياضية النهائية في ميكانيكا الكم
١٥٩	نظرية الاطلاق أو الاضطراب
	تعيين التصحيح ذي الرتبة الاولى في اطار نظرية
١٦٢	الاطلاق التي لا تعتمد على الزمن
١٦٤	مثال (١-٧)
	تعيين التصحيح ذي الرتبة الثانية في اطار نظرية
١٦٧	الاطلاق التي لا تعتمد على الزمن
	نظرية الاطلاق ذي الرتبة الاولى في حالة وجود
١٧٠	اضمحلال (انتاء متعدد)
١٧٤	مثال (٢-٧) الى (٧-٧)
١٨١	تذييلات
١٨١	تذييل ١ : قيم بعض الثوابت الفيزيائية
	تذييل ٢ : لمحة عن بعض العلماء الذين شاركوا في بناء
١٨٣	نظرية ميكانيكا الكم *
١٩٠	تذييل ٣ : قائمة ببعض المراجع *

الباب الأول

منشأ ميكانيكا الكم

الباب الاول

منشأ ميكانيكا الكم

ماهى ميكانيكا الكم ؟

ميكانيكا الكم هى المعالجة الرياضية لحركة جزيئات المادة (Matter Molecules) ومكوناتها من ذرات (Atoms) ونوياته (Nuclei) وجسيمات أولية (Elementary Particles) مختلفة .

الاساس الفيزيائى لمكانىكا الكم :

فى الفترة من ١٩٠٠ م الى ١٩٢٣ م توصل العلماء الى مجموعة من الحقائق الفيزيائية المتعلقة بالاشعاع الكهرومغناطيسى (Electromagnetic Radiation) تتلخص فى ظواهر التوزيع الطيفى لاشعاع الجسم التام السواد (Black-Body Radiation Phenomena) وظاهرة الانبعاث الكهروضوئى (Photoelectric Effect) وطيف ذرة الهيدروجين (Hydrogen-Atom Spectrum) وظاهرة استقطار كومبتون (Compton Effect) التى لم يتم تفسيرها جميعاً الا فى اطار الخاصية الجسيمية للاشعاع الكهرومغناطيسى التى قدمها العالم ماكس بلانك (Max Planck) عام ١٩٠٠ م لتفسير منحنيات طيف الاشعاع للجسم تام السواد .

يتركز هذا الاطار فى العرضين التالين لبلانك :

- ١ - ينبعث أو يمتص الاشعاع الكهرومغناطيسى فى صورة كمات (Quanta) • الطاقة E لكل كم (Quantum) منها تساوى حاصل ضرب ثابت بلانك h فى التردد ν للاشعاع • أى أن :

$$E = h \nu \quad (1.1)$$

حيث : $h = 6.625 \times 10^{-34} \text{ Joule.sec.}$

٢ - يفسر التوزيع الطيفي للاشعاع الصادر من جسم تام السواد درجة حرارته المطلقة T بواسطة العلاقة الرياضية التالية :

$$U(\nu) d\nu = \frac{8 \pi \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{(e^{h\nu/kT} - 1)} d\nu \quad (1.2)$$

حيث : $U(\nu)$ هي الكثافة الحجمية للطاقة لوحدة مدى التردد .

• $U(\nu) d\nu$ هي الكثافة الحجمية للطاقة في المدى من الترددات بين ν و $\nu + d\nu$.

معبراً عنها بالجول لكل متر مكعب

• k هي ثابت بولتزمان (Boltzmann's constant) ويمساوي

$$(1.38 \times 10^{-23} \text{ Joule/}^\circ\text{K})$$

• c سرعة الضوء

وبذلك اتضح لأول مرة ان الاشعاع الكهروضوئي ليس والذي كان يعتقد دائماً انه ينتشر على صورة حركة موجية ولاغنى عنها لفهم الكثير من الظواهر الاشعاعية مثل التداخل والحيود والاستقطاب . اتضح ان له في نفس الوقت خاصية جسيمية .

اي ان الاشعاع الكهروضوئي يتصف بخاصية مزدوجة (Duality

Property) تتمثل في خاصية موجية (Wave Property) واخرى جسيمية

(Particle (or Corpuscular) Property) ولا يمكن لنا الاستغناء عن أي منهما .

وقد أوضح العالم الفرنسي لوى دي برولى (Louis de Broglie) نتيجة

للتماثل الكوني ونتيجة التماثل بين الطاقة E وكتلة m من أي مادة تعبرها لقانون اينشتاين :

$$E = mc^2 \quad (1.3)$$

أن جسيم مادة ما كتلته m ويتحرك بسرعة v ننوِّع أن يتصف أيضاً بخاصية شاذية

جسيمية وبوجهه ومثقل ذلك في علاقة دي برولى التالية والتي قدمها عام ١٩٢٤ :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1.4)$$

حيث λ الطول الموجي (وهي خاصية موجيه) لموجه دي برولى الماحجمة لحركة هذا الجسيم
 p هي كمية الحركة الخطية (وهي خاصية جسيمية) ويلاحظ أنها تعطى
 تبعاً لسرعة الجسيم بالعلاقات التالية :

$$p = mv \quad (1.5)$$

إذا كانت سرعة الجسيم v أقل بكثير من سرعة الضوء c
 بينما تعطى بالعلاقة :

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.6)$$

إذا كانت سرعة الجسيم لا يمكن إهمالها بالنسبة لسرعة الضوء حيث m_0 هي الكتلة الساكنة (rest mass) أي كتلة الجسيم وهو ساكن .

وقد ثبت صحة العلاقة (1.4) من نتائج تجارب حيود الالكترونات التي حصل عليها العلماء ديفنسن وجيرمر (Davisson and Germer Experiment, 1927) والعالم طومسون (G.P. Thomson, 1928)

بعض خصائص موجات دي برولى :

تتميز تلك الموجات بما يأتي :

(١) تنتشر بسرعة طور (Phase Velocity) أي سرعة انتشار مصدر الموجة
 (والفرق لها بالريز v) قيمتها دائماً اقل من سرعة الضوء في الفراغ c وتضيق
 ذلك كما يلي :

نفرض أن السرعة الخطية لجسيم هي v وكمية حركته الخطية p وطاقته الكلية E حيث

$$E = mc^2$$

$$p = mv$$

فمن التماثل بين الأشعاع والمادة يمكن التعبير عن الطاقة الكلية بعلاقة تشبه تماماً العلاقة الخاصة بطاقة الفوتون مع الأخذ في الاعتبار أن سرعة الطور لموجات دي برولى هي w بدلا من السرعة c في حالة موجات الأشعاع الكهرومغناطيسى . ونطسى ذلك يكون :

$$E = hp = h \frac{w}{\lambda}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{بما}$$

$$\therefore mc^2 = \frac{h}{\lambda} w \quad (a)$$

$$mv = \frac{h}{\lambda} \quad (b)$$

وقسمة هاتين المعادلتين ينتج أن

$$w = \frac{c^2}{v} = \frac{c}{\beta} \cdot c \quad (1.7)$$

وبما أن c/v دائما أكبر من الواحد الصحيح (تعا للنظرية النسبية الخاصة لأينشتين) فإن سرعة الطور w تكون دائما أكبر من سرعة الضوء c .

(٢) تعتمد سرعة الطور w على الطول الموجى λ لموجات دي برولى الماحية لاى جسيم متحرك تهما للعلاقة الاتية :

$$w = c \sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{h^2} \cdot \lambda^2} \quad (1.8)$$

ومعنى ذلك أن تلك الموجات يحدث لها تشتت (Dispersion) حتى في الفراغ (Vacuum or Free Space) . ويمكن إثبات العلاقة (1.8) كما يلي :

نعلم من النظرية التنبؤية الخاصة ان الطاقة الكلية E لاى جسيم ترتبط بكمية حركته الخطية p وكتلته الساكنة m_0 بالعلاقة الاتية :

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (1.9)$$

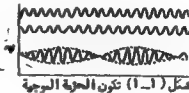
والتعويض عن E و p بما يتلها

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{نصل على :}$$

$$\left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$$

$$\therefore w^2 = c^2 + (m_0 c^2)^2 \frac{\lambda^2}{h^2}$$

$$\therefore w = c \sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{h^2} \lambda^2}$$



وهي العلاقة (1.8) المطلوب اثباتها .

٢) تكون الحزمة الموجية (Wave-Packet Formation) لموجات

دى برولى صاحبة لجسيم متحرك :

نعلم انه من المستحيل قياس كمية نيزائية ما بدقة مطلقة (أى بدون خطأ ما)

وطى ذلك حد قياس كمية حركة p لجسيم ما تكون نتيجة القياس هى فى الحقيقة

القيمة $p_0 \pm \frac{\Delta p}{2}$ حيث Δp يمثل الخطأ فى تحديد قيمة p من طاقة

دى برولى (1.4) يتضح ان موجات دى برولى صاحبة لحركة هذا الجسم تكون

ذات اطوال موجيه مداها $\lambda \pm \frac{\Delta \lambda}{2}$ أى أن هناك طيفاً من تلك الموجات

تصاحب حركة هذا الجسم ومعنى ذلك ان تلك الموجات سوف تتداخل مع بعضها تبعاً

لهذا تراكب الازاحات (Superposition Principle) الخاص بالحركات الموجيه .

وهذه الموجات تكون مايسمى بالحزمة الموجيه (Wave Packet) وهى تمثل نوعاً

من الحركات الموجيه والتي فيها تكون سعة الموجه كبيره جداً فى حيز صغير من انتشار

الوجه بهذا تكاد تكون الصمة مهمة في باقي الحيز الذي تنتشر فيه (انظر شكل ١ - ١) .

فإذا رمزنا بالرمز ψ_j لاي من تلك الازاحات لموجات دي برولى الصاحبة للجسيم المتحرك فانه تبعا لهادي الحركة الوجه يمكن التمييز عن ψ_j بالملائمة التالية :

$$\psi_j = A \exp [-i (\omega t - kx)] \quad (1.10)$$

وكالمعاد فان

A تساوى سمة التذبذبة (Amplitude)

ω تساوى $\sqrt{-1}$

ω التردد الزاوي ω مرتبط بطاقة الجسيم الصاحبة له تلك الموجات كما يلي :

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{E}{h} = \frac{E}{\hbar} \quad (1.11)$$

k هو كتلة الوجه مساوي ايضا كتلة العدد الموجي (Wave Number or

Wave Vector) . وهذا الكتلة مرتبط بكتلة الحركة الخطية للجسيم كما يلي :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\frac{h}{p}} = \frac{p}{\hbar} \quad (1.12)$$

كما انه يمكن التمييز هذه الكتلة للتردد الزاوي ω كما يلي :

$$k = k(\omega) = k_0 + \Delta k = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \Delta\omega \quad (1.13)$$

حيث ω_0 هي القيمة المتوسطة للتردد الزاوي . وهو كتلة يمكن كتابته على الصورة الآتية :

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{u} \quad (1.14)$$

\vec{u} هو واحد في الوضع

ونتيجة تداخل جميع الازاحات ψ للموجات الصاحبة في مدى التردد الزاوى الصغير $\pm \frac{\Delta\omega}{2}$ حول القيمة المتوسطة ω_0 فان الازاحة البصلة ψ عند لحظة معينة موضع معين من حيث الانتشار تعطى كما يلى :

$$\psi = \sum_j \psi_j = \int A_0^{-1}(\omega t - kx) d\omega \quad (1.15)$$

$$\therefore \psi = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} A_0 \left[-1 \left[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (k_0 + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_0} \Delta\omega) x \right] \right] d\omega \quad (1.16)$$

وانذا افترضنا ان المعمة A واحدة لجميع الموجات المتداخلة في هذا المدى الصغير $\Delta\omega$ فان

$$\psi = A_0^{-1}(\omega_0 t - k_0 x) \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} -1 \left[\left(t - \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_0} x \right) \Delta\omega \right] d\xi \quad (1.17)$$

وانذا رمزنا للكمية $(\omega - \omega_0)$ بالرمز ξ فان

$$\xi = (\omega - \omega_0) = \Delta\omega \quad (1.18)$$

$$d\xi = d\omega \quad (1.19)$$

والتمويض من (1.18) و (1.19) في (1.17) نحصل على :

$$\psi = A_0^{-1}(\omega_0 t - k_0 x) \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{+\frac{\Delta\omega}{2}} -1 \left[\left(t - \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_0} x \right) \xi \right] d\xi \quad (1.20)$$

$$\therefore \psi = A_0^{-1}(\omega_0 t - k_0 x) \left[\frac{-1 \left[\left(t - \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_0} x \right) \right]}{-1 \left[\left(t - \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_0} x \right) \right]} \right]_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{+\frac{\Delta\omega}{2}} \quad (1.21)$$

$$= A_0^{-1}(\omega_0 t - k_0 x) \left[\frac{-1 \left[\left(t + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_0} x \right) \frac{\Delta\omega}{2} - \left(t - \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_0} x \right) \frac{\Delta\omega}{2} \right]}{-1 \left[\left(t - \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_0} x \right) \right]} \right] \quad (1.22)$$

- A -

في أن :

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$e^{+i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\therefore e^{-i\theta} - e^{+i\theta} = -2 i \sin \theta \quad (1.23)$$

وبنى ذلك تختصر معادلة (1.22) إلى الصورة التالية :

$$\psi = \left[\frac{2 A \sin \left\{ \left(t - \left(\frac{\partial K}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} x \right) \frac{\omega_0}{2} \right\}}{t - \left(\frac{\partial K}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} x} \right] e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \quad (1.24)$$

هذه المعادلة (1.24) تمثل حركة موجية لها طور (Phase) يتميز بتعدد زمني متوسط ω_0 وعدد موجي متوسط k_0 بينما تتميز بسعة اهتزازة متغيرة تكون موضع قمتها متحركاً بسرعة نحصل عليها بوضع :

$$t - \left(\frac{\partial K}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} x = 0 \quad (1.25)$$

فإذا رمزنا لتلك السرعة بالرمز u والذي يمثل ما يسمى بسرعة الحزمة الموجية (Group Velocity) فاننا من المعادلة (1.25) نحصل على :

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial K} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (1.26)$$

العلاقة بين سرعة الجسم v وسرعة الحزمة الموجية u لوجات دي برولى

الصاحبة لحركته :

علينا ان سرعة الطور w تعطى بالعلاقة :

$$w = c \sqrt{1 + a^2 \cdot \lambda^2} \quad (1.8')$$

$$a^2 = \frac{m_0^2 c^2}{h^2}$$

حيث

وإن التردد الزاوي ω يرتبط بسرعة الطور w وشبه الموجة k على
الصورة الآتية :

$$\omega = kw \quad (1.11)$$

والاستفادة من (1.26) فإن سرعة الحزمة الموجية u يمكن الحصول عليها
كما يلي :

$$u = \frac{\partial \omega}{\partial k} = k \frac{dw}{dk} + w$$

$$\therefore u = k \frac{dw}{dk} + w \quad (1.27)$$

$$\therefore u = k \left[\frac{G a^2 \lambda}{1 + a^2 \lambda^2} \right] \cdot \left[- \frac{2\pi}{k^2} \right] + w$$

$$\therefore u = -G \left(\frac{a^2 \lambda^2}{1 + a^2 \lambda^2} \right) + w \quad (1.28)$$

والمتمهين من (1.8) في (1.28) نحصل على

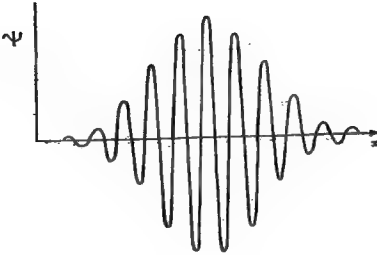
$$u = -G \left[\frac{\left(\frac{w^2}{G^2} - 1 \right)}{\frac{w}{G}} \right] + w$$

$$\therefore u = \frac{G^2}{w} \quad (1.29)$$

$$v = \frac{G^2}{w} \quad \text{لكن من (1.7) لدينا}$$

$$u = v \quad \text{من ذلك يتضح أن :} \quad (1.30)$$

وهذه النتيجة الهامة توضح أن الجسم والحزمة الموجية المرتبطة به تتجه
تدخل موجات دي برولي المصاحبة له أثناء حركته يكونان متلازيين وتحركان بنفس
السرعة .



شكل (١ - ١)

وهذا يمكن فهمه على أساس أن الجسم يكون محاطاً بتلك الحزمة الموجية أثناء حركته . ولذا فإن احتمال الحاجة الجسم عند نقطة ما داخل حزمة الموجية يتناسب مع مربع السعة عند تلك النقطة داخل الحزمة فهذا معنا عدم إمكانية تحديد موضع الجسم إلا في حدود انتشار تلك الحزمة Δx الموضح بالشكل أعلاه . لذلك فإن Δx تمثل الخطأ في تحديد موضع هذا الجسم .

وإذا ما أردنا تغيير هذا الخطأ فإنه يستلزم زيادة المدى الطيفي $\Delta \lambda$ وهذا بدوره يؤدي إلى خطأ أكبر Δp_x في تحديد كمية حركته الخطية المكافئة وهذا في حقيقته يعبر عن مبدأ هام من مبادئ ميكانيكا الكم وهو مبدأ اللايقين الذي لهايزنبرج وسوف نتناوله فيما يلي :

مبدأ اللاتحديد لهايزنبرج (The Heisenberg Uncertainty Principle)

هذا المبدأ تقدم به العالم الألماني ورنر هايزنبرج عام ١٩٢٦ ونص على أنه ما يلي :

" من المستحيل أن يتم في نفس اللحظة قياس متغيرين ديناميكين مترافقين (Two Conjugate Dynamical Variables) إلا في حدود خطأ في كسل متجا حيث يكون حاصل ضرب هاتين الخطأتين مساوياً أن لم يكن أكبر من ثابت بلانك h (أو ثابت ديراك \hbar حيث $\hbar = h/2\pi$)

وكأثلة لتلك المتغيرات الديناميكية المترافقة ما يلي :

١ - إحداثي الموضع للجسيم في اتجاه ما ومركبه كمية الحركة الخطية في نفس هذا الاتجاه مثل

$$(x, p_x) \quad , \quad (y, p_y) \quad , \quad (z, p_z)$$

ب - الطاقة الكلية E لجسيم ما والزمن t اللازم لتحديد تلك الطاقة .

ج - الإزاحة الزاوية θ لحركة جسيم في مدار ما ومركبه كمية الحركة الزاوية L نفس الاتجاه المبدى على مستوى هذا المدار (L_z) .

والتمهيد الرياضي لمبدأ اللاتحديد في قياس تلك المتغيرات المترافقة يكون على

التوالي كما يلي :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \quad (1.31)$$

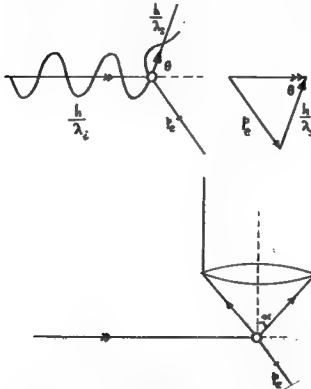
$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar \quad (1.32)$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar \quad (1.33)$$

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \hbar \quad (1.34)$$

$$\Delta \theta \cdot \Delta L \geq \hbar \quad (1.35)$$

ومنحاول فيما يلي استنتاج احدى هذه العلاقات ولكن العلاقة (1.31) :



شكل (١-٤) رسم توضيحي لاساسيات استقطار اشعاع كهرومغناطيس بواسطة الكترون
"ماكن" تبعاً لنظرية كوتون ويان وذلك بالنسبة للمدسة الدقيقة "فسي"
ميكروسكوب "بوهر - هايزنبرج".

لتصور استخدام مجهر هايزنبرج لتحديد موضع الكترون منفصل عن موضع
الالكترون آخر مجاور له . (انظر شكل ١ - ٢) . ومعلوم من جاذية حيز الاشعاع
(Radiation Diffraction Principles) ان قدرة تحليل المجهر
(Microscope Resolving Power) اى أقل مسافة Δx بين جسيمين متجاورين
بحيث يمكن رؤيتهما خلاله كجسيمين منفصلين عن بعضهما تُمطى بالعلاقة التالية :

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \mu \cdot \sin \alpha} \quad (1.36)$$

حيث

Δx هي قدرة تحليل المجهر .

الطول الموجي للاشعاع المرتد عن الجسم والداخل الى المجهر .

μ هو معامل انكسار الوسط المحيط بالجسمين المراد رقبتهما كجسمين

منفصلين . وقيته تساوى الوحدة للفراغ .

α نصف زاوية مخروط الاشعاع المتجه الى شعبيه المجهر والمرتد عن الجسم .

فإذا ما أردنا تصغير المسافة Δx بقدر الامكان اى إذا ما أردنا جعل مسددة

التحليل أفضل فان ذلك يتطلب اساسا استخدام اشعاع يكون طوله الموجى λ

اصغر ما يمكن وهذا ممنا بالتالى زيادة احتمال حدوث استطارة كومبتون

(Compton Scattering) لهذا الاشعاع بواسطة الالكترون المراد تحديده مكانه .

ومما يجب هذه الاستطارة ارتداد هذا الالكترون بكمية حركة خطية يكون لها قيم لى

اتجاه محور x نى المدى بين $(p_0)_x$ و $(p'_0)_x$ حيث :

$$(p_0)_x = \frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2} \cos \theta$$

$$\theta = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\therefore (p_0)_x = \frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2} \sin \alpha \quad (1.37)$$

والنمل

$$(p'_0)_x = \frac{h}{\lambda_1} + \frac{h}{\lambda_2} \sin \alpha \quad (1.38)$$

وطرح المعادلتين الاخيرتين نحصل على مدى الخطأ (p_x) نى تحديد كمية

الحركة الخطية نى الاتجاه x كما يلى :

$$\Delta p_x = (p'_x) - (p_x)$$

$$\therefore \Delta p_x = \frac{2h}{\lambda_B} \sin \alpha \quad (1.39)$$

وبلذلك من المعادلة (1.36) يكون حاصل ضرب الخطئين Δx ، Δp_x قيمته كالتالى :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \frac{\lambda_B}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{2h}{\lambda_B} \sin \alpha = h$$

وهذه النتيجة احدى الصور التى يعنى عليها مبدأ اللاتحديد لهايزنبرج .

مثال (١ - ١) :

وضح كيف يمكن استنتاج قانون بلانك باستخدام النتيجة الكلاسيكية التى ينسب عليها قانون بولتزمان الاحصائى التالى (١٨٧٧) .

$$n_1 = n_0 \exp \left[- (e_1 - e_0)/kT \right]$$

حيث

n_1 هو عدد الجسيمات فى حيز ما الذى تتصف بطاقة e_1
 n_0 هو عدد الجسيمات فى نفس الحيز الذى تتصف بطاقة e_0
 وإذا اعتبرنا e_0 تساوى صفراً لأن العلاقة تصبح على الصورة :

$$n_1 = n_0 \exp \left[- e_1/kT \right]$$

الحل :

لنتصور حيزاً يحل التجويف الداخلى لفرن متزن حرارياً عند درجة الحرارة المطلقة T ونطبقاً لفكرة المالم بلانك تصوران الطاقة الاشعاعية داخل هذا التجويف يحيطها جسيمات ذات حركة تذبذبية وهى ما اسماها بلانك "كّات الاشعاع"
 (Radiation Quanta) وكل كم اشعاع يحمل طاقة $u_{\text{م}} = h\nu$

تساوى حاصل ضرب عدد صحيح n في كمية صغيرة من الطاقة $h\nu$ تساوى hf حيث f هو تردد الحركة التذبذبية (المرتبط) لهذا الكم h هو ثابت بلانك أي أن $hf = h\nu$ حيث n هو عدد صحيح يساوى صفر ١ ٢ ٣ إلى ما لا نهاية .

ولحساب متوسط الطاقة \bar{W} التي يحتملها أي شئ لنا نعم مجموع حاصل ضرب عدد الجسيمات المهتزة عند مستوى طاقة معين من قية تلك الطاقة على المجموع الكلي لاعدادها أي أن :

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n h\nu}{\sum_{n=0}^{\infty} n h\nu e^{-\frac{n h\nu}{kT}}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{مجموع الطاقات التي تحتملها الكمات الاعماية} \\ \text{مجموع عدد تلك الكمات} \end{array} \right) \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n_0 e^{-\frac{n h\nu}{kT}}) n h\nu}{\sum_{n=0}^{\infty} (n_0 e^{-\frac{n h\nu}{kT}})} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n_0 e^{-\frac{n h\nu}{kT}}) n h\nu}{\sum_{n=0}^{\infty} n_0 e^{-\frac{n h\nu}{kT}}} \\ &= \frac{\left[0 + (hf) \cdot e^{-\frac{hf}{kT}} + (2 hf) \cdot e^{-\frac{2hf}{kT}} + (3 hf) \cdot e^{-\frac{3hf}{kT}} + \dots \right]}{\left[1 + e^{-\frac{hf}{kT}} + e^{-\frac{2hf}{kT}} + e^{-\frac{3hf}{kT}} + \dots \right]} \\ &= \frac{hf \cdot (e^{-\frac{hf}{kT}}) \cdot \left[1 + 2 e^{-\frac{hf}{kT}} + 3 e^{-\frac{2hf}{kT}} + \dots \right]}{\left[1 + e^{-\frac{hf}{kT}} + e^{-\frac{2hf}{kT}} + \dots \right]} \\ &= hf \cdot e^{-\frac{hf}{kT}} \cdot \frac{\left[1 - e^{-\frac{hf}{kT}} \right]^{-2}}{\left[1 - e^{-\frac{hf}{kT}} \right]^{-1}} \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{W} = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \quad (1.40)$$

وهذه العلاقة (1.40) هي ما تسمى بقانون بلانك لقية الطاقة المتوسطة التي تحلها الكمّات الإشعاعية :

وللحصول على قانون بلانك الذي يعطى مقدار الطاقة الإشعاعية $W_\lambda = \epsilon_\lambda d\lambda$ التي في وحدة الحجم من الحيز في مدى الطول الموجي $(\lambda + d\lambda, \lambda)$ يجب علينا أن نضرب \bar{w} في عدد أنماط الحركة التذبذبية المتاحة في وحدة الحجم من هذا الحيز وهذا العدد تبعاً للاشتقاق الرياضى الذى أجراه العالم الانجليزى رالى عبارة عن :

$$dn_\lambda = 8\pi \frac{d\lambda}{\lambda^4} \quad (1.41)$$

وهذه العلاقة (1.41) هي ما تسمى بقانون بلانك للتوزيع الاحصائى للإشعاع من الجسم تام المباد Black-body-radiation Planck's distribution law

شال (١ - ٤) :

(أ) وضع أن قانون بلانك يؤول الى قانون فين (Wien's Law) في حالة الأطوال الموجية الصغيرة (أى عند الترددات العالية) :

الحصل :

قانون بلانك للتوزيع الاحصائى للطاقة الإشعاعية يكتب على الصورة التالية مع وضع $\frac{c}{\lambda} = f$:

$$\epsilon_\lambda d\lambda = \frac{8\pi^5 h c^5 \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda \quad (1.42)$$

وفي حالة الاطوال الموجية الصغيرة فان هذا يعنى :

$$\frac{ch}{\lambda kT} \gg 1 \quad , \quad e^{\frac{ch}{\lambda kT}} \gg 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \epsilon_{\lambda} d\lambda &= \frac{8\pi ch \cdot \lambda^{-5}}{e^{\frac{ch}{\lambda kT}}} d\lambda \\ &= \frac{A_1}{A_2} \cdot \lambda^{-5} d\lambda \end{aligned} \quad (1.43)$$

حيث الثابت $8\pi ch = A_1$ والثابت الآخر $(ch/k) = A_2$
 والمعادلة (1.43) هي ما يعرف بقانون فين الكلاسيكى .

(ب) وضع ان قانون بلانك يؤل الى قانون والى وجينز الكلاسيكى
 Rayleigh-Jeans Law في حالة الاطوال الموجية الطويلة

الحل :-

بما ان

$$e^{\frac{ch}{\lambda kT}} = 1 + \left(-\frac{ch}{\lambda kT}\right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{ch}{\lambda kT}\right)^2 + \dots$$

إذاً عندما تكون λ قيمها كبيرة فان القيمة $(ch / \lambda kT)$ تصبح اصغر بكثير
 من 1 وعليه فان المقام فى معادلة (1.42) يؤل الى

$$\therefore \epsilon_{\lambda} d\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda \quad (1.44)$$

والمعادلة (1.44) هي ما يعرف بقانون والى وجينز الكلاسيكى .

شال (٢-١) :

استنتج قانون ستيفان • Stefan's Law من قانون بلانك •

الحل :

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad \therefore df = -\frac{cd\lambda}{\lambda^2} \quad \text{بما ان}$$

$$\therefore e_{\lambda} d\lambda = -e_f df = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3 df}{(e^{hf/kT} - 1)}$$

ويمكننا بذلك إيجاد الطاقة الكلية الاشعاعية في وحدة الحجم من الحيز $W(T)$ كما يلي :

$$W(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{f^3}{e^{hf/kT} - 1} df$$

وبوضع $x = hf/kT$

$$\therefore f = \frac{kT}{h} \cdot x \quad f^3 = \frac{k^3 T^3}{h^3} \cdot x^3$$

$$df = \frac{kT}{h} \cdot dx$$

$$\therefore W(T) = \frac{8\pi k^4}{c^3 h^3} \cdot T^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

ويمكن إجراء التكامل كما يلي :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} x^3 \cdot (e^x - 1)^{-1} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^3 \cdot \frac{e^{-x} dx}{1 - e^{-x}} = \int_0^{\infty} x^3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx \end{aligned}$$

حيث التكامل لأي من حدود التسلسلة (وليكن ترتيبه) n هو :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx &= \int_0^{\infty} x^3 \cdot d \left(e^{-nx} \right) = \frac{-1}{n} \int_0^{\infty} x^3 d \left(e^{-nx} \right) \\ &= \left\{ -\frac{1}{n^4} \left[\frac{n^3 x^3 + 3 n^2 x^2 + 6 n x + 6}{e^{nx}} \right] \right\}_0^{\infty} \\ &= \left\{ -\frac{1}{n^4} \left[0 + 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0 + \frac{6}{1}) \right] \right\} \\ &= \frac{6}{n^4} \end{aligned}$$

وعلى ذلك فإن

$$\int_0^{\infty} x^3 (e^x - 1)^{-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^4} = \frac{\pi^4}{15} \quad (1.45)$$

$$\therefore W(T) = \frac{8 \pi k^4}{15 \sigma^3 h^3} \cdot \frac{\pi^4}{15}$$

$$= \left(\frac{8 \pi^5 k^4}{15 \sigma^3 h^3} \right) \cdot T^4$$

$$= \sigma \cdot T^4 \quad (1.46)$$

حيث (1.46) هو قانون بولتزمان وستيفان بينما الثابت σ المعروف بثابت

$$= \frac{8 \pi^5 k^4}{15 \sigma^3 h^3} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ watt.m}^{-2} \cdot \text{deg}^{-4}$$

مثل (1) :

إذا فرض تجفيف سطح تمام المواد على هيئة مكعب طول ضلعه ٢ سم ودرجة حرارة

التجفيف ١٥٠٠ كلفن ؟

- أ - احسب عدد الانبعاث التذبذبية الموجودة في وحدة الحجم داخل التجويف
لدى الطول الموجي بين 1010 و 10000 أنجستروم (Å)
ب - ما هو متوسط الطاقة الإشعاعية الكلية داخل التجويف في هذا المدى ؟

الحل :

- أ - عدد الانبعاث التذبذبية في وحدة الحجم داخل التجويف الإشعاعي هو :

$$\bar{n} = \frac{8 \pi d\lambda}{\lambda^4}$$

$$\lambda = \frac{4595 + 5005}{2} = 5000 \text{ Å} \quad \text{حيث}$$

$$d\lambda = 5005 - 4595 = 10 \text{ Å}$$

$$\therefore d\bar{n} = \frac{8 \times 2.14 \times (10 \times 10^{-10})}{(5 \times 10^{-7})^4} = 4.02 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$$

- ب - لإيجاد متوسط الطاقة الإشعاعية الكلية داخل التجويف في هذا المدى $\bar{\epsilon}_\lambda$

نوجد حاصل ضرب \bar{n} (متوسط الطاقة الإشعاعية في وحدة الحجم) في عدد الانبعاث الذي يوجد في الحجم الكلي للتجويف ، وعلى ذلك :

$$\bar{w} = \frac{h \frac{c}{\lambda}}{\exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT} - 1\right)}$$

$$= \frac{(6.625 \times 10^{-34}) \cdot (3 \times 10^8 / 5 \times 10^{-7})}{\exp\left[\left((6.625 \times 10^{-34}) \times 3 \times 10^8 / (5 \times 10^{-7})\right) / (1.38 \times 10^{-23})(1500)\right] - 1}$$

$$\therefore \bar{\epsilon}_\lambda = \bar{w} \times d\bar{n} \times \text{cavity volume} = 5.9 \times 10^{-15} \text{ Joules.}$$

مثال (١-٥) :

- أ - اثبت ان طول موجة دي بروي λ الصالحة لجسيم كتلته m يتعبره
بسرعة تساوي الجذر التربيعي لمتوسط مربع السرعات للتوزيع الإحصائي لجسيمات

غاز ما تمحا لأكسجين هو : $(\lambda = h / \sqrt{3 m k T})$

حيث T درجة الحرارة المطلقة للغاز ، k ثابت بولتزمان .

ب- ماقية λ اذا كان الجسم نيوتونيا ، درجة الحرارة للتوزيع الاحصائى لأكسجين هي 20° سيلزيوس .

ج- احسب زاوية الحيود لثل هذه النيوترونات التى تحدث لها بواسطة المستويات الاساسية (Principal Planes) في بلورة أكسيد المغنسيوم - وهى بلورة مكعبة - الهمد a بين مستوياتها 101 أنجستروم .

الحل :

أ - من نتائج نظرية الحركة للغازات معلوم أن الجذر التربيعى لتوسط مربع سرعات الجزيئات $v_{r.m.s}$ عبارة عن

$$v_{r.m.s.} = \sqrt{3 RT/M}$$

حيث R هو الثابت العاملى للغاز ، M الوزن الجزيئى الجرامى للغاز وهو يعادى حاصل ضرب عدد أفوجادرو N_A في وزن جزيء واحد m ومن جزيئات الغاز

$$\therefore v_{r.m.s.} = \sqrt{3 RT/m N_A} = \sqrt{3 kT/m}$$

إذا بالتعويض في معادلة دي برولى على فترضان الجسم المعطى يتحسره بسرعة مادية للسرعة v_{rms} فان :

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v_{rms}} = \frac{h}{\sqrt{3 m k T}}$$

ب- اذا كان الجسم نيوتونيا أى ان الكتلة m تماوى 1878 مرة مثل كتلة الالكترون الماكئة اذا :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3 m k T}} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J.sec.}}{\sqrt{3 (1838 \times 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (1.38 \times 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}) (293^\circ\text{K})}}$$

$$= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4.51 \times 10^{-24}} = 1.47 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.47 \text{ \AA}$$

جـ - تبعاً لقانون براج (Bragg's Law) للحيود في البلورات فان :

$$2 d \cdot \sin \theta_n = n \lambda$$

حيث d هي المسافة الفاصلة بين مستويات الذرات التي حدث عندها الحيود θ_n هي زاوية الحيود للرتبة n ولنفرض ان $n = 1$ اذا

$$2 \cdot (2.101 \times 10^{-10}) \cdot \sin \theta_1 = 1 \times 1.47 \times 10^{-10}$$

$$\therefore \sin \theta_1 = \frac{1.47 \times 10^{-10}}{4.202 \times 10^{-10}} = 0.3498$$

$$\therefore \theta_1 = 20.4^\circ$$

مثال (١ - ٦) :

جسيم ألفا ينطلق من نواة ذرة الراديوم 226 بطاقة حركية ٥,٢٨ مـيـوـن

الكيلو إلكترون فولت :

أ - احسب طول موجة دي برولي المصاحبة لهذا الجسيم .

ب - قارن بين هذا الطول وقطر النواة المنطلق منها .

الحـل :

أ - طول موجة دي برولي المصاحبة لجسيم ألفا :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p_{\text{rel}}} = \frac{h}{\sqrt{2 m_e E_e}} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot (4 \times 1837 \times 9.1 \times 10^{-31}) \cdot (5.78 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19})}} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{1.11 \times 10^{-19}} = 5.97 \times 10^{-15} \text{ m}\end{aligned}$$

ب - قطر النواة المطلق منها جسم ألفا نحسبه من المعادلة التالية :

$$D = \text{Diameter of radium-226} = 2 \cdot (r_0 \cdot A^{1/3})$$

$$\therefore D = 2 \cdot (1.25 \times 10^{-15} \times (226)^{1/3})$$

$$= 2 \times 1.25 \times 6.08 \times 10^{-15} = 15.2 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$\therefore \lambda/D = \frac{5.97 \times 10^{-15}}{15.2 \times 10^{-15}} = 0.393$$

مثال (١ - ٧) :

استنتج عدداً للاتديد لها يظهري باستخدام ظاهرة تأثير دوبلر
Doppler Effect • المرتبطة بتردد الاشعاع الكهرومغناطيسى الذى يصدر من
ذرة غير مستقرة .

الحل :

الاشعاع الصادر من الذرة نتيجة انتقالها من حالة مضطربة الى حالة اقل اضطراباً
وانشاءً تحركها بسرعة v يكون تردده الظاهري :

$$f = f_0 (1 + \frac{v}{c})$$

حيث f_0 التردد عندما تكون v مساوية للصفر ، c سرعة الضوء .

وبما ان عملية قياس التردد تستغرق فترة زمنية ΔT فعنى ذلك ان هناك خطأ في تحديد التردد f مقداره :

$$\Delta f = \frac{1}{\Delta T} = f - f_0 = \frac{f_0 v}{c}$$

وخلال تلك الفترة تتحرك الذرة مسافة Δx مقدارها :

$$\Delta x = v \cdot \Delta T = v \cdot \frac{c}{f_0 v} = \frac{c}{f_0}$$

وحيث ان طاقة الفوتون hf_0 وكمية تحركه الخطي (hf_0/c) بينما ترتد الذرة المسافة Δx بحيث يتحقق قانون بقاء كمية التحرك الخطي فان :

$$Mv = \frac{h f_0}{c} = \Delta p_x \quad (M = \text{كتلة الذرة})$$

$$\therefore \Delta x \cdot \Delta p_x = \frac{h}{f_0} \cdot \frac{h f_0}{c} = h$$

شمسال (٩ - ٨) :

يتحرك الإلكترون في ذرة الايدروجين في الحالة الطارة $n = 2$ ويظل كذلك لفترة زمنية 10^{-8} ثانية قبل ان يهبط الى المستوى العادى . احسب مقدار اللاتحديد في قيمة الطاقة للحالة $n = 2$. هل هذا المقدار يمثل تصحيح ذو أهمية في نظرية بوهرا التي تتوقع القيمة (-3.39 eV) ؟

الحل :

إذا رمزنا للفترة الزمنية 10^{-8} ثانية على انها مقدار اللاتحديد Δt فسي
عبر الحالة الطارة للذرة المعطاة ΔE مقدار اللاتحديد المقابل في قيمة
الطاقة للحالة $n = 2$.

$$\therefore \Delta E \cdot \Delta t \geq h$$

$$\therefore \Delta E \sim \frac{h}{\Delta t} = \frac{1.056 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{10^{-8} \text{ s}} = 1.056 \times 10^{-26} \text{ J}$$

$$= \frac{1.056 \times 10^{-26} \text{ J}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} = 6.6 \times 10^{-8} \text{ eV}$$

وبما أن هذا المقدار ΔE صغير جداً بالنسبة للقيمة المتوقعة تبعاً لنظرية
بوهروهي 3.39 - إلكترون فولت .

مثال (١ - ١) :

الإلكترون طاقة حركته تساوي : (أ) 15 إلكترون فولت ، (ب) 15 مليون
إلكترون فولت .
احسب لكل حالة سرعة الطور لجسيمات بولز المرتبطة بحركة الإلكترون .

الحل :

أ - بما أن طاقة حركة الإلكترون المعطاة في تلك الحالة هي 15 إلكترون فولت
نقط بيننا طاقة الكتلة الساكنة للإلكترون هي 0.51 مليون إلكترون فولت
إذاً يمكننا تطبيق العلاقات التوتونية عليه :

$$\therefore \lambda_1 = \frac{h}{p_1} = \frac{h}{\sqrt{2 m_e E_0}} = \frac{6.625 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot (9.1 \times 10^{-31}) \cdot (15 \times 1.6 \times 10^{-19})}}$$

$$= 3.2 \times 10^{-10} \text{ m} = 3.2 \text{ \AA}$$

∴ سرعة الطور v_1 للموجات السالبة لحركة الإلكترون في هذه الطاقة هي :

$$\lambda_1 = c \sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{h^2}} \lambda_1^2 = 3 \times 10^8 \sqrt{1 + \frac{(9.1 \times 10^{-31})^2 (3 \times 10^8)^2 (3.2 \times 10^{10})}{(6.625 \times 10^{-34})^2}}$$

$$= 3 \times 10^8 \sqrt{1 + 17300.4} = 3.95 \times 10^{10} \text{ m/s}$$

ب- في هذه الحالة طاقة الحركة المعطاة هي 15 مليون إلكترون فولت أي حوالي ثلاثين مرة قدر طاقة الكتلة الساكنة للإلكترون ($m_0 c^2$) إذاً يجب علينا معاملنا الإلكترون في هذه الحالة تبعاً لقوانين أينشتاين النسبية وعلى ذلك فإن الطاقة الكلية للإلكترون هي 15.51 مليون إلكترون فولت • وتطبق علاقة أينشتاين التي تربط بين تلك الطاقة الكلية E وكمية الحركة الخطية p_2 نحصل على :

$$p_2 = \frac{\sqrt{E^2 - (m_0 c^2)^2}}{c}$$

$$= \frac{\sqrt{(15.51 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19})^2 - (0.51 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19})^2}}{3 \times 10^8}$$

$$= \frac{1.6 \times 10^{-13}}{3 \times 10^8} \sqrt{(15.51)^2 - (0.51)^2} = 8.22 \times 10^{-21} \text{ kg.m.s}^{-1}$$

$$\therefore \lambda_2 = \frac{h}{p_2} = \frac{6.625 \times 10^{-34}}{8.22 \times 10^{-21}} = 8.06 \times 10^{-14} \text{ m}$$

$$\therefore m_2 = 3 \times 10^8 \sqrt{1 + \frac{(9.1 \times 10^{-31})^2 (3 \times 10^8)^2 (8.06 \times 10^{-14})^2}{(6.625 \times 10^{-34})^2}}$$

$$= 3 \times 10^8 \times 1.0005 = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

ومنه يتضح ان عندما يصغر الطول الموجي لموجات دي بروي الصاحبة للجسيمات الأولية نتيجة ازدياد طاقة حركتها فإن سرعة الطور لتلك الموجات تقرب من سرعة الضوء ولا تزيد عنها الا بمقدار صغير للغاية •

الباب الثانى

المعادلة الموجبة لدالة الحالة

الباب الثانى

المعادلة الموجية لحالة الحالة

المعادلة الموجية لحالة الحالة

معادلة شرودنجر (The Schrödinger Equation)

نعلم انه لاى حركة موجيه توجد معادلة تفاضلية مناسبة تعبر عنها • فنثلا فسى حالة انتشار موجات صوتيه فى اتجاه الاحداثى السينى x فان المعادلة التى تمثّل تلك الحركة وتربط بين الازاحة ξ (فى اتجاه x) واحداثى الزمن t وسرعة الموجة v هى :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

بينما فى حالة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية المستقطبه فان الحركة الموجيه للمجالين الكهربى والمغناطيسى المتلازمين فيها توصف بالمعادلتين التاليتين :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

حيث c تمثل سرعة انتشار الاشعاع الكهرومغناطيسى
• E_y شدة المجال الكهربى • H_z شدة المجال المغناطيسى •

ولكن مثل هذه المعادلات الموجية وجدت غير مناسبة لتمثيل الحركة الموجيه لموجات دى بى رولى المصاحبة لاي جسم متحرك (انظر مثال ٢ - ١) •

مسألة (١٠ - ١) :

احسب الفترة الزمنية التي يسمح بها جداً الالتحيد لإييزن باي المتعاادل
(π^0) للتواجد على هيئة زوج من بروتون ونيوترون مضاد .

الحل :

$$\therefore \Delta E \cdot \Delta t \sim h \quad , \quad \Delta E = (m_p + m_{\bar{p}}) c^2$$

$$\therefore \Delta t = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 3.14 \times 2 \times 1838 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16}} = 3.5 \times 10^{-25} \text{ sec.}$$

مسألة (١١ - ١) :

الكرون طاقة حركته 110° الكرون تولت يمر خلال فتحة دائرية نصف قطرها
 $r = 1.6$ ميكرون . احسب مقدار الالتحيد الذي يطرأ على زاوية خروجه من الفتحة .

الحل :

علاقة جداً الالتحيد التي تربط بين الالتحيد في الزاوية $\Delta \theta$ والالتحيد
في كمية التحرك الزاوي ΔL هي :

$$\Delta \theta \cdot \Delta L \sim h$$

حيث يمكننا وضع

$$\Delta L = m_0 v r$$

$$\therefore \Delta \theta = \frac{h}{m_0 v r} = \frac{\lambda}{r}$$

$$\lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \cdot (9.1 \times 10^{-31}) \cdot (150 \times 1.6 \times 10^{-19})} = 0.1 \times 10^{-9} \text{ m} \quad \text{ولكن}$$

$$\therefore \Delta \theta = \frac{0.1 \times 10^{-9}}{1.2 \times 10^{-6}} = 0.000083 \text{ radian} = 0.0048 \text{ degree}$$

مثال (١ - ١٢) :

عين باستخدام مبدأ اللاتحديد اشداد الحيز الذي تشغله ذرة الهيدروجين
وقية ادنى مستوى للطاقة •

الحل :

اذا فرضنا ان الالكترون مزاجد في المتوسط على بعد r من البروتون
فان كمية الحركة الخطية له تكون p بحيث

$$p = \frac{h}{r}$$

اذا طاقة الحركة $K.E.$ يمكننا التعبير عنها بالصورة :

$$K.E. = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2mr^2}$$

وحيث ان القوة الكهربية التي بين الالكترون والبروتون تكسب الالكترون طاقة وضع $P.E.$:

$$P.E. = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

اذا الطاقة الكلية W_F للالكترون :

$$W_F = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} + \frac{h^2}{2mr^2}$$

وطيه فان ادنى مستوى طاقة W_{F_0} لذرة الايدروجين يمكن الحصول عليه بمساواه
تناضل W_F بالنسبة للمسافة r بالصغرى ان :

$$\left(\frac{dW}{dr}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} - \frac{h^2}{2mr^3} = 0 \quad , \quad r = r_0$$

$$\therefore r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{me^2}$$

$$= \frac{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times (1.5 \times 10^{-34})^2}{9.1 \times 10^{-31} \times (1.6 \times 10^{-19})^2} = 6.31 \times 10^{-11} \text{ m}$$

: W_{r_0} باستخدام هذه القيمة نستطيع الحصول على قيمة أدنى مستوى للطاقة

$$\begin{aligned} W_{r_0} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_0} + \frac{h^2}{2mr_0^2} \\ &= -0.9 \times 10^9 \times \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{6.31 \times 10^{-11}} + \frac{(1.5 \times 10^{-34})^2}{2(9.1 \times 10^{-31}) \cdot (6.31 \times 10^{-11})^2} \end{aligned}$$

$$= -17.7 \text{ eV}$$

ولقد تحول العالم النمساوي ايرفين شرودنجر (Erwin Schrödinger) في عام ١٩٢٤ لتلك المعادلة المناسبة والتي تُعرف منذ ذلك الحين باسم "معادلة شرودنجر" (Schrödinger equation) ويمكن استنباطها بطريقة مسطحة فيما يلي :

في الباب الاول ذكرنا ان اى جسم متحرك يلزمه حزمة موجيه تنصف بالمعصية التفريره (انظر صفحة) والتي تعرف في علم ميكانيكا الكم بما يسمى دالة الموجه (Wave Function) او دالة الحاله (State Function) • ويمكننا التعبير عنها بالصورة التالية :

$$\psi = A e^{-i(\omega t - kx)} \quad (2.4)$$

فإذا ما أجرينا على تلك الدالة التفاضل الجزئى بالنسبة لاحد اى الزمن ($\frac{\partial}{\partial t}$) نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi &= -i\omega A e^{-i(\omega t - kx)} \\ &= -i\omega \psi \end{aligned} \quad (2.5)$$

وعضرب كل من طرفي تلك المعادلة في المعامل \hbar نحصل على :

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hbar (-i\omega \psi) = \hbar \omega \psi = E \psi$$

أى ان :

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = E \psi \quad (2.6)$$

وتُظهر هذه العلاقة بأنه اذا أجرينا في المعامل لقياس الطاقة الكلية E للجسم الذى تعبر به عن حركته الموجيه فان ذلك يقابل رياضيا التأثير على تلك الدالة الموجيه بالمؤثر $\hbar \frac{\partial}{\partial t}$.

ومعادلة (2.6) هي احد الامثلة لما هو معروف باسم معادلة القيم الخلية (Eigenvalue equation) وفيها يسمى $(\hbar \frac{\partial}{\partial t})$ بالعامله (operator)

التي تؤثر على دالة الحالة ψ ونتيجة هذا التأثير نحصل على القيمة الخاصة (Eigenvalue) للمتغير الديناميكي (Dynamical Variable) الذي يتقبل تلك الماملة وهو في هذه الحالة الطاقة الكلية E للجسم . بينما تسمى الدالة ψ الضرورية في تلك القيمة الخاصة باسم الدالة الخاصة (Eigen function)

والمثل اذا ما أجرينا على نفس الدالة ψ التفاضل الجزئي بالنسبة لاحداثي الوضع (وهو في هذه الحالة الاحداثي السيني x) نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi = +1 \hbar A e^{-1(\alpha x - kx)} = +1 \hbar \psi$$

وضرب كل من طرفي هذه المعادلة في $(-1 \hbar)$ نحصل على :

$$-1 \hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = + \hbar \hbar \psi = p_x \psi$$

اي ان

$$-1 \hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = p_x \psi \quad (2.7)$$

لدرجات

والمثل في الحالة العامة التي فيها ψ دالة لاحداثيات الوضع x و y و z بجانب احداثي الزمن t اي ان $\psi = \psi(x, y, z, t)$ نحصل بالمثل على نتيجتين مشابهتين لمعادلة (2.7) وهما :

$$-1 \hbar \frac{\partial}{\partial y} \psi = p_y \psi \quad (2.8)$$

$$-1 \hbar \frac{\partial}{\partial z} \psi = p_z \psi \quad (2.9)$$

وحيث ان الطاقة الكلية E لاي جسم يتحرك حركة انتقالية هي

$$\frac{p^2}{2m} + V(x, y, z) = E \quad (2.10)$$

حيث $\frac{p^2}{2m}$ هي طاقة حركته الانتقالية

و $V(x, y, z)$ هي طاقة الوضع لهذا الجسم .

وبدخال ψ في طرفي تلك المعادلة والتعبير عن الطاقة E ، p^2 بمسما
يقابلها حيث $\vec{p} \cdot \vec{p} = p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ من علامات نحصل على :

$$\frac{1}{2m} \left[\left(-1 \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(-1 \hbar \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(-1 \hbar \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] \psi + V(x, y, z) \psi = 1 \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (2.11)$$

$$\therefore -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi + V(x, y, z) \psi = \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (2.12.a)$$

$$\therefore -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x, y, z) \psi = \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (2.12.b)$$

$$\therefore \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z) \right] \psi = 1 \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (2.13)$$

حيث عامله اللاپلاسيان (The Laplacian Operator) هي :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.14)$$

والمعادلة (2.13) هي الصورة العامة لمعادلة شرودنجر التي تعبر عن الحركة
الوجيه للجسم . وإذا افترضنا ان الجسم يتحرك تحت تأثير مجال محافظ
(Conservative Field) فان القوة F المؤثرة عليه تعطى بالعلاقة

$$\vec{F} = - \text{grad } V = - \vec{\nabla} V \quad (2.15)$$

حيث V كما اشرنا من قبل هي طاقة الوضع .
وإذا افترضنا ان حركة الجسم الانتقالية تحدث في بعد واحد وليكن الاتجاه السيني x
فان معادلة شرودنجر تصبح على الصورة المبسطة التالية :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \psi = 1 \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (2.16)$$

نجد أن تشير إلى أن معادلة شرودنجر الموجية تتميز بما يلي :

١ - أنها معادلة خطية (Linear Equation) وهذا ضروري من الناحية الفيزيائية حيث تسمح بتراكب حلولها المختلفة لتفسير ظواهر التداخل (مثال ذلك تجربة حيود الالكترونات) وتكون الحزمة الموجية . كما اعرفنا في الباب الاول .

٢ - أنها لا تحتوي على متغيرات ديناميكية مثل مركبات كمية الحركة الخطية أو الطاقة الكلية للجسيم ولكنها تحوي على ثوابت مثل كتلة الجسيم أو ثابت ديراك العالي \hbar . وهذا أيضاً يجعلها تسمح بتراكب حلولها المرتبطة بالقيم الذاتية المختلفة لتلك المتغيرات الديناميكية .

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها الطاقة الكلية للجسيم لا تعتمد على الزمن فإن معادلة شرودنجر تكتب على الصورة الآتية :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x,y,z) + V(x,y,z) \psi(x,y,z) = E \psi(x,y,z) \quad (2.17)$$

حيث تسمى ψ هنا بدالة الحالة المستقرة (Stationary Wave Function) أو الحالة المستقرة (Stationary State) .

وصفاً تتميز دالة الحالة ψ بالخاصة التالية :

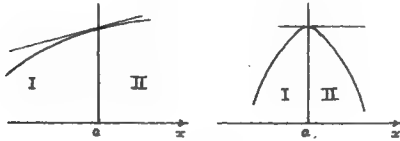
١ - يمكن أن تتداخل مع نفسها وذلك لتفسير نتائج تجارب حيود الجسيمات مثل الالكترونات والنيوترونات ... الخ .

٢ - تمبر عن احتمال تواجد الجسيم المرتبطة به بمعنى أنها تكون كبيرة القيمة عند النقط التي يكون احتمال تواجد الجسيم فيها كبير ولذلك تسمى ψ سعة الاحتمال (Probability Amplitude) . وعندما تكون قيمة ψ صفراً عند نقطة ما فإن هذا معناه عدم تواجد الجسيم عند تلك النقطة .

٣ - تأخذ قيمة مفردة (Single Valued) لكل نقطة في الحيز الذي تتحرك فيه وفي بعض الأحيان تكون تلك القيمة تساوى صفراً .

٤ - يستحيل أن تصل قيمتها عند نقطة ما إلى ما لا نهاية بمعنى أنها تأخذ فقط قيمة محددة (Finite) ويجب أن تصل هذه القيمة إلى الصفر عندما تكون تلك النقطة في ما لا نهاية . ويظهر عن هذه الخاصية بأن ψ حسن السلوك (Well Behaved) .

٥ - تتصل كل من الدالة ψ وانحدارها $\text{grad } \psi$ بالاستمرارية (Continuity) في كل الحيز الخارج لحركة الجسم مهما تعددت الفواصل الحدية فيه (انظر الشكل)



شكل (٢ - ١)

توضيح استمرارية الدالة ψ وانحدارها $\text{grad } \psi$ بمعنى

$$(\text{grad } \psi_I)_{x=a} = (\text{grad } \psi_{II})_{x=a} , (\psi_I)_{x=a} = (\psi_{II})_{x=a}$$

توضيح عدم الاستمرارية وهذه غير مسموح بها في ميكانيكا الكم إذ أن ذلك يمتنع على انه عند الفاصل الحدى $x=a$: انظر شكل (٢-١) في صفحة (٢٦) .

$$\text{grad } \psi_I \neq \text{grad } \psi_{II} , \psi_I \neq \psi_{II}$$



شكل (٢-١) توضيح عدم الاستمرارية وهذه غير صحيح بها في ميكانيكا الكم إذ أن ذلك يعني أنه عند الفاصل الحدي $x = a$:

$$\text{grad } I \neq \text{grad } II \quad , \quad I = II$$

وهذا لا يتفق مع المعنى الفيزيائي لدالة الحالة وانحدارها .

٦ - يُعبر عن القيمة المطلقة $|\psi|^2$ للدالة بما يسمى بكثافة الاحتمال (Probability Density) $P(x, y, z; t)$ وهي احتمال تواجد الجسم في وحدة الحجم من الحيز المتاح . وعلى ذلك يمكن كتابة $P(x, y, z; t) dx dy dz$ احتمال التواجد للجسم في عنصر الحجم $dx dy dz$ حول النقطة (x, y, z) عند اللحظة t بالعلاقة الآتية :

$$P(x, y, z; t) dx dy dz = |\psi(x, y, z; t)|^2 dx dy dz \quad (2.17)$$

وحيث أنه من المؤكد تواجد الجسم في منطقة ما داخل الحيز المتاح لذا فإن مجموع احتمالات تواجده داخل هذا الحيز المتاح يجب أن يساوي الوحدة أي أن :

$$\int_{\text{الحيز المتاح}} P(x, y, z; t) dx dy dz = \int_{\text{الحيز المتاح}} |\psi|^2 dx dy dz = 1 \quad (2.18)$$

٧ - يمكن التأثير على الدالة ψ بمعاملة خطية ما (Linear Operator)

تقابل متغير ديتاليكي معين وهذا يعبر عنه بمعادلة القيم الخاصة على الصورة التالية :

$$\hat{O} \psi_n = \alpha_n \psi_n \quad (2.19)$$

حيث n هو ما يعرف بعدد الكم (Quantum Number) يسمى القيم α_n لهذا المتغير الديتاليكي باسم القيم الخاصة ويكون مجموعها طيفيا من هذه القيم (Eigenvalue Spectrum) يكون في المادة غير متصل يميزها ما يسمى بأعداد الكم وقابل كل قيمة من هذا الطيفدالة خاصة بها ψ_n وتميز بنفس عدد الكم n وتكون الدوال ψ_n مجموعة كاملة اعتيادية متعامدة (Orthonormal Complete Set) إذا حققت العلاقة التالية :

$$\begin{aligned} \int \psi_n^* \psi_{n'} dx dy dz &= \delta_{nn'} \\ &= 1 \quad \text{if } n = n' \\ &= 0 \quad \text{if } n \neq n' \end{aligned} \quad (2.20)$$

حيث $\delta_{nn'}$ يسمى دلتا كرونكر (Kronecker Delta) . وعندما يساوى الوحدة في حالة $n = n'$ فان الدوال ψ_n تكون مجموعة كاملة اعتيادية (Normalized Complete Set) أما إذا كانت $\delta_{nn'}$ تساوى صفرا (في حالة $n \neq n'$) فان الدوال ψ_n تكون مجموعة كاملة متعامدة (Orthogonal Complete Set) .

٨ - يمكن التأثير عليها بأكثر من عامل خطية على النتائج بمعنى انه إذا أثرتا على ψ بعملية خطية \hat{O} ثم أثرتا على الناتج بعملية خطية \hat{P} فان الناتج يعطى بالعلاقة التالية :

$$\hat{P} \hat{O} \psi = \hat{P} (\hat{O} \psi) \quad (2.21)$$

يصح بالمعاملات الخطية (Linear Operators) تلك التي تحقق العلاقات التالية :

$$(1) \quad \hat{P}(a\psi) = a \hat{P}\psi \quad (2.22)$$

$$(11) \quad \hat{A}(a_1\psi_1 + a_2\psi_2) = a_1\hat{A}\psi_1 + a_2\hat{A}\psi_2 \quad (2.23)$$

حيث a ، a_1 ، a_2 ثوابت .

١ - تحقق الدوال ψ_n مبدأ التراكب (Superposition Principle)
 وبما له فانه اذا كانت ψ_1 ، ψ_2 هما دالتان تعبيران عن جسم ما فسي
 حالتين كميتين مختلفتين فان اى تراكب خطى (Linear Superposition)
 لهما $(C_1\psi_1 + C_2\psi_2)$ يعطى دالة حالة ψ تكون قياماً
 لاحتمال تواجد الجسم ايأى في الحالة الكمية الاولى باحتمال $|C_1|^2$ أو التواجد
 في الحالة الكمية الثانية باحتمال $|C_2|^2$ وهذا يتضح كما يلى :

نفرض ان

$$\psi = C_1\psi_1 + C_2\psi_2$$

فان احتمال التواجد في الحالة الكمية الاولى او في الحالة الكمية الثانية يعطى
 تبعاً للمعادلة (2.14) على الصورة :

$$\begin{aligned} \int \psi^* \psi \, d\tau &= \int (C_1\psi_1 + C_2\psi_2)^* (C_1\psi_1 + C_2\psi_2) \, d\tau \\ &= (C_1^*\psi_1^* + C_2^*\psi_2^*) (C_1\psi_1 + C_2\psi_2) \, d\tau \\ &= |C_1|^2 \int \psi_1^* \psi_1 \, d\tau + |C_2|^2 \int \psi_2^* \psi_2 \, d\tau \\ &\quad + C_1^* C_2 \int \psi_1 \psi_2 \, d\tau + C_2^* C_1 \int \psi_2^* \psi_1 \, d\tau \\ &= |C_1|^2 + |C_2|^2 + 0 + 0 \\ &= |C_1|^2 + |C_2|^2 \end{aligned}$$

وما إن

$$\int \psi^* \psi d\tau = 1$$

اذن

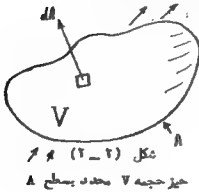
$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

حيث $|c_1|^2$ يمثل كما سبق ان ذكرنا احتمال التواجد في الحالة الكمية الاولى و $|c_2|^2$ يمثل احتمال التواجد في الحالة الكمية الثانية .

١- الدالة ψ التي تصف نظاما يتكون من مجموعة من الجسيمات كل بنفـها يتحدد موضعه تملأ باحداثيات مستقلة عن احداثيات موضع اى جسيم آخر يمكن التعبير عنها على صورة حاصل ضرب الدوال الخاصة بكل جسيم على حـدة اى ان :

$$\psi(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots) = \psi(x_1, y_1, z_1) \psi(x_2, y_2, z_2) \dots \psi(x_i, y_i, z_i) \quad (2.24)$$

شـجـه كثافة تيار الاحتمال Probability Current Density Vector



علفنا ان سـجـه الدالة الموجية $|\psi|^2$ المساحة للجسيم تعطي احتمال التواجد في وحدة الحجم عند نقطة معينة ولحظة معينة . لذلك فان الاحتمال P ان نجـد الجسم في الحيز من الفراغ الذى حجمه V والحدود بسطح مساحته A يعطى بالـعـلـة :

$$P = \int \psi^* \psi dV \quad (2.25)$$

حيث $dV \equiv d^3r$ عنصر الحجم .

ولكى نحصل على معدل تغير احتمال تواجد الجسيم مع الزمن داخل الحيز V نفاضل طرفي المعادلة (2.25) بالنسبة للزمن كما يلي :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \int \psi^* \psi dV \quad (2.26)$$

$$\therefore \frac{dP}{dt} = \int \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dV \quad (2.26')$$

ولكن باستخدام معادلة شرودنجر والمراقبة المركبة (Complex conjugate) لها يمكن اثبات ان :

$$\left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{im} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) \quad (2.27)$$

بالكيفية الاتية :

معادلة شرودنجر (2.16) يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2im} \nabla^2 \psi + \frac{1}{i\hbar} V(x) \psi \quad (a)$$

∴ المراقبة المركبة لها تكتب على الصورة :

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = +\frac{\hbar}{2im} \nabla^2 \psi^* - \frac{1}{i\hbar} V(x) \psi^* \quad (b)$$

وضرب المعادلة (a) في ψ^* والمعادلة (b) في ψ نحصل على

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2im} \psi^* \nabla^2 \psi + \frac{1}{i\hbar} \psi^* V(x) \psi \quad (c)$$

$$\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = +\frac{\hbar}{2im} \psi \nabla^2 \psi^* - \frac{1}{i\hbar} \psi \psi^* V(x) \quad (d)$$

بجمع المعادلتين (c) و (d) نحصل على :

$$\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = \frac{\hbar}{2im} (\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi)$$

$$\therefore \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = -\frac{1}{2} \frac{h}{m} (\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi)$$

$$\therefore \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{h}{m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) \quad (2.28)$$

وبالتعويض من (2.28) في (2.26) نحصل على :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2} \frac{h}{m} \int_V (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) dV \quad (2.29)$$

ولكن التكامل الحثي في الطرف الايمن يمكن تحويله الى تكامل سطحي وذلك باستخدام نظرية جرين (Green's Theorem) فنحصل على :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2} \frac{h}{m} \int_A (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \cdot d\vec{A} \quad (2.30)$$

يمكن كتابة المعادلة (2.30) على الصورة :

$$\frac{dP}{dt} = - \int \vec{S} \cdot d\vec{A} \quad (2.31)$$

حيث المتجه \vec{S} يُعرف كالآتي :

$$\vec{S} = -\frac{1}{2} \frac{h}{m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (2.32)$$

وباستخدام نظرية الانتشار لجاوس (Gauss's Divergence Theorem) يمكن

تحويل التكامل السطحي في المعادلة (2.31) الى تكامل حثي فنحصل على :

$$\frac{dP}{dt} = - \int_V \text{div } \vec{S} dV \quad (2.33)$$

والتعويض من معادلة (2.26) نحصل على :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) dV = - \int_V \text{div } \vec{S} dV \quad (2.34)$$

وحيث ان الحيز V اختياري (Arbitrary) فان المعادلة (2.34) تكون

صحيحة اذا كان قلب التكامل (Integrand) في طرفي المعادلة متماثلين فنحصل

على :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) = - \operatorname{div} S \quad (2.35)$$

$$\therefore \operatorname{div} S = - \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) \quad (2.36)$$

مقارنة هذه المعادلة بمعادلة الاستمرارية (Continuity Equation) فمى الفيزياء الكلاسيكية وليكن نى مجال علم الكهربية التى تكتب على الصورة :

$$\operatorname{div} \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.37)$$

نجد ان الشح \vec{S} يتقابل شح كثافة التيار ولذلك يسمى الشح \vec{S} يستجبه كثافة تيار الاحتمال . وكثافة الشح ρ لوحدة الحجم تتقابل كثافة الاحتمال لوحدة الحجم $(\psi^* \psi)$. لذلك فالمعادلة (2.36) يمكن تفسيرها فيزيائيا على اساس ان معدل النقص نى كثافة الاحتمال لوحدة الحجم $(\psi^* \psi) / \partial t$ يساوى مقدار ما يمتص نى وحدة الزمن من احتمال التواجد خلال اسطح وحدة الحجم $(\operatorname{div} S)$. حيث كثافة تيار الاحتمال هى :

$$\vec{S} = - \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (2.32)$$

مثال (2.1) :

اوجد القيم الممكن قياسها لكمية الحركة الخطية لجسيم m . علما بأنه نى مكان ما على المحور السينى بين النقطتين المحددتين :

$$x = a, \quad x = b$$

الحل :

ان العاملة Ω لكمية الحركة الخطية هى :
 وعلى هذا تصبح المعادلة :

$$-1 \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\Omega \psi_\lambda = \Omega_\lambda \psi_\lambda$$

$$-1 \leq \frac{\partial}{\partial x} \psi_\lambda = \Omega_\lambda \psi_\lambda$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى . ومن الواضح انه يمكن تحقيقها
اذا فرضنا ان ψ_λ دالة للتغير x . فيصبح الحل لهذه المعادلة هو :

$$\therefore \int \frac{d\psi_\lambda}{\psi_\lambda} = \int \frac{i\Omega_\lambda}{\hbar} dx$$

$$\therefore \ln \psi_\lambda = \frac{i\Omega_\lambda}{\hbar} x + \ln C$$

حيث $\ln C$ ثابت التكامل

$$\therefore \frac{\psi_\lambda}{C} = e^{\frac{i}{\hbar} \Omega_\lambda x}$$

$$\therefore \psi_\lambda = C e^{\frac{i\Omega_\lambda}{\hbar} x}$$

ونلاحظ ان هذا الحل وحيد القيمة . علاوة على ذلك فان :

$$\int \psi^* \psi dx = (b - a) C^* C$$

وهذه كمية محدودة لكل قيمة محدودة للثابت C . اذا ليست هناك اية

قيود على Ω_λ . فيمكننا عند القياس الحصول على كل قيم الحركة الخطية . اى ان القيم

الذاتية لكمية الحركة الخطية تكون طيفا متصلا .

شال (٢ - ٢) :

على اعتبار ان لجسيم ما حر الحركة وتتحدد حالته بالدالة الموجية التالية
(عند الزمن $t = 0$ صفر) :

$$\psi(x, 0) = A e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} - ik_0 x\right)}$$

اوجد قيمة المعامل A بدلالة الثابت a .

الحل :

يتم تحديد قيمة المعامل A عن طريق تحقيق شرط المعايير التالي :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, 0)|^2 dx &= 1 \\ \therefore \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, 0)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 (e^{-\frac{x^2}{a^2} + ik_0 x}) (e^{-\frac{x^2}{a^2} - ik_0 x}) dx \\ &= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx = |A|^2 \cdot a\sqrt{\pi} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore |A|^2 = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}$$

شال (٣ - ٢) :

اشحن المقصود بتحويل فورييه للدالة $f(x)$

الحل :

لتفرض دالة $f(x)$ تتميز بانها تمديد نفسها دوريا كلما تغير الاحداثي x

- ٤٥ -

بمقدار L فان هذا معناه ان :

$$f(x + L) = f(x) \quad (1)$$

فمثلا الدالة e^{ikx} حيث $k = \frac{2\pi}{L}$ تتميز بهذه الصفة لأن :

$$e^{ik(x+L)} = e^{ikx} \cdot e^{ikL} = e^{ikx} \cdot e^{i \cdot 2\pi} = e^{ikx}$$

$$e^{i \cdot 2\pi} = 1 \quad \text{لأن}$$

وعلى ذلك يمكن باختيار شروط معينة مناسبة للتعبير عن اى دالة $\psi(x)$ بدلالة e^{inkx} حيث n عدد صحيح بالصورة التالية :

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inkx} \quad (2)$$

ويمكن بسهولة تعيين اى من المعاملات a_n وليكن a_m وذلك بمرب كل من طرفى المعادلة (2) فى e^{-imkx} ثم اجراء التكامل على مدى دورة كاملة من الاحداثى x اى من $(-L/2)$ الى $(+L/2)$ اى ان :

$$\int_{-L/2}^{L/2} \psi(x) e^{-imkx} dx = \int_{-L/2}^{L/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(n-m)kx} dx \quad (3)$$

وحيث ان

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{i(n-m)kx} dx = 0$$

اذا كان العدد الصحيح n لا يساوى m بينما يساوى واحد صحيح عندما n يساوى m فهذا يؤدى الى تلافى جميع الحدود فى (3) ما عدا الحد التالى :

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \psi(x) e^{-imkx} dx \quad (4)$$

وهذه المعادلة هي التعبير الرياضى لما يقصد بتحويل فورييه للدالة المعطاة $\psi(x)$.

مسألة (٢ - ٤) :

على اعتبار حزمة موجية معيارية مربعة الشكل (عند $t = 0$) ومعرفة كالآتى :

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i \frac{p_0 x}{\hbar}} \quad \begin{matrix} |x| \leq L \\ |x| > L \end{matrix}$$

احسب تحويل فورييه لـ $\psi(x)$ واذن النتيجة فيزيائيا .

الحل :

فى هذه الحالة نمر عن تحويل فورييه كما يلى

$$a(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) e^{-\frac{i}{\hbar}(px - Et)} dt$$

$$\therefore a(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 0) e^{-\frac{i}{\hbar} px} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar} \cdot \sqrt{2L}} \int_{-L}^{+L} e^{\frac{i}{\hbar}(p_0 - p)x} dx$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{\pi L}} \frac{\sin \frac{(p_0 - p)L}{\hbar}}{p_0 - p}$$

شال (٢ - ٥) :

برهن على ان الدالتين الذاتيتين ϕ_m و ϕ_n التاليتين لقيمتين
ذاتيتين مختلفتين ϵ_m و ϵ_n للعالة الهرميه H دائما متعامدتين *

الحل :

الدالة ϕ_m تحقق العالة :

$$H\phi_m = \epsilon_m \phi_m \quad (1)$$

اذا ضهنا تلك المعادلة من ناحية الشال في ϕ_n^* ونجى التكامل نحمل على

$$\int \phi_n^* H \phi_m dV = \epsilon_m \int \phi_n^* \phi_m dV \quad (2)$$

ومن الضرورى ان تحقق الدالة ϕ_n المرافقة المركبة لمعادلة (١) اى المعادلة :

$$H^* \phi_n^* = \epsilon_n^* \phi_n^* \quad (3)$$

ويجب ان تذكر هنا ان ϵ_n هى حقيقة وضرب بمعادلة (3) من ناحية اليسار
في ϕ_m واجرا' التكامل نحصل على النتيجة

$$\int \phi_m H \phi_n^* dV = \epsilon_n \int \phi_n^* \phi_m dV \quad (4)$$

ومرة اخرى الطرف الايسر لمعادلة (2) مساويا للطرف الايسر لمعادلة (4)
لان العالة هرميه وعليه فاننا بطن المعادلتين نحصل على :

$$(\epsilon_m - \epsilon_n) \int \phi_n^* \phi_m dV = 0 \quad (5)$$

ولكننا من الاساس نفترض ان القيتين الذاتيتين ϵ_m و ϵ_n مختلفتين اى ان :
($\epsilon_m - \epsilon_n$) لا يساوى صفرا * اذا :

$$\int \phi_n^* \phi_m dV = 0 \quad (6)$$

اى ان الدالتين الذاتيتين ϕ_m و ϕ_n هما متعامدتان لهما

شال (٦ - ٢) :

ناير دالة كمية التحرك العرجية التالية

$$a(\vec{p}) = N \exp \left[-\frac{\alpha}{\hbar} |\vec{p}| \right]$$

ثم وضع ان الحالة العرجية الطاقة $\psi(\vec{r})$ عند $t = 0$ هي تعطى بالصورة

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} (2\alpha)^{3/2} \frac{\alpha}{(r^2 + \alpha^2)^2}$$

الحل :

في هذه الحالة من المناسب استخدام الاحداثيات الكرية وعلى ذلك فان دسوط

المعايرة يعطينا :

$$1 = \iiint |a(\vec{p})|^2 p^2 dp \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty p^2 |N|^2 \exp \left[-\frac{2\alpha p}{\hbar} \right] dp$$

$$= |N|^2 \cdot 4\pi \cdot \frac{2}{\left(\frac{2\alpha}{\hbar}\right)^3}$$

$$\therefore a(p) = \left[\frac{\alpha^3}{\pi \hbar^3} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{\alpha}{\hbar} |\vec{p}| \right]$$

$$\therefore \psi(r, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right)^3 \iiint p^2 dp \sin \theta d\theta d\phi a(p) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r} \right]$$

واذا اخترنا المركبة p_z في اتجاه \vec{r} اذاً $\vec{p} \cdot \vec{r} = p r \cos \theta$

$$\begin{aligned}
 \therefore \psi(\vec{r}, 0) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dp p^2 \exp\left[-\frac{\alpha p}{\hbar}\right] \left(\frac{3}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \\
 &\quad \int_0^\pi \exp\left[-1 p r \cos \theta/\hbar\right] \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{\alpha^3}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_0^\infty dp p^2 \exp\left[-\frac{\alpha p}{\hbar}\right] \\
 &\quad \cdot \frac{2\hbar}{p r} \sin \frac{pr}{\hbar} \\
 &= \frac{1}{\pi} (2\alpha)^{3/2} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + r^2)^2}
 \end{aligned}$$

شمال (٢-٧) :

هناك معادلة شرودنجر في بعد واحد وضع ان $\frac{d\psi}{dx}$ دالة تتصرف بأنها متصلة مادامت دالة الجهد $V(x)$ لها قيمة محددة سواء تلك القيمة تتصلل او غير متصلة .

الحل :

$$\therefore \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi$$

إذا باجراء التكامل على معادلة شرودنجر في صورتها هذه يبين $x = x_0 - \epsilon$ الى $x = x_0 + \epsilon$ نحصل على :

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x_0+\epsilon} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x_0-\epsilon} = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} [E - V(x)] \psi dx$$

~ ٥٠ ~

والطرف الايمن لهذه المعادلة يقول دائما للصفر عندما تقرب ϵ من الصفر
ما دامت دالة الجهد لها قيمة محددة . وهذا يعنى ان الطرف الايسر يحاوى صفرا
ايضا والتالى فان $\frac{dw}{dx}$ تتصف بانها متصلة .

الباب الثالث

المعاملات الخطية في ميكانيكا الكم

Linear Operators in Quantum Mechanics

الباب الثالث

العمليات الخطية في ميكانيكا الكم Linear Operators in Quantum Mechanics

سبق الإشارة الى انه في ميكانيكا الكم يقابل كل كمية فيزيائية Ω عامل خطية $\hat{\Omega}$ وإذا أثرت على دالة الحالة المرتبطة بجسيم ما فإن ذلك يقابل اجراء تجرسة في العمل لقياس الكمية الفيزيائية (المتغير الديناميكي) الذي تعبر تلك الحالة عنظر

وإذا أجرنا مثل هذه التجربة عدة مرات على نفس الجسم فاننا نحصل على طيف من القيم لتلك الكمية الفيزيائية وصي المتوسط الاحصائي (The Statistical Mean or the Average) لتلك القيم بالقيمة المتوقعة (Expectation Value) لهذه الكمية الفيزيائية وطادة تكتب على الصورة $\langle \Omega \rangle$ والتي يعبر عنها بالعلاقة الاتية :

$$\langle \Omega \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{\Omega} \psi \, d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, d\tau} \quad (3.1)$$

وطى نرض أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, d\tau = 1$$
$$\therefore \langle \Omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (\hat{\Omega} \psi) \, d\tau \quad (3.2)$$

وفيما يلي سنُورد بعض الاثلة للعمليات الخطية والتي كثيرا ما نلتقيها في ميكانيكا الكم بالاعانة لتلك التي سبق ذكرها في الباب السابق والتقوى التي تتبعها :

مثال (١-٢) : العامل الخلية التي تقابل الازاحة الانتقالية أى عامل الانتقال
: (Translation Operator \hat{T})

من المعنى الخاص بتلك العامل فإن :

$$\hat{T} \psi(x) = \psi(x+a) \quad (3.3)$$

حيث a هي المسافة التي أُنزح بها الجسم من موضعه الاصلى x . فلماذا
نبرأ عن $\psi(x+a)$ على صورة التسلسلة الآتية التالية :

$$\psi(x+a) = \psi(x) + a \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \dots$$

أى أن :

$$\psi(x+a) = \sum \frac{1}{n!} a^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \psi(x) \quad (3.4)$$

ولكن من المعلوم أن :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum \frac{1}{n!} x^n \quad (3.5)$$

مقارنة المعادلتين (3.4) و (3.5) نجد أن عامل الانتقال عبارة عن :

$$\hat{T} = e^{a \frac{\partial}{\partial x}} \quad (3.6)$$

موجه عام يُكتب على الصورة

$$\hat{T} = e^{a_1 \frac{\partial}{\partial x_1}} \quad (3.6')$$

مثال (٢-٢) : العامل الخلية التي تقابل الازاحة الدورانية أى عامل الدوران \hat{R}
: (Rotation Operator)

من المعنى الخاص بتلك العامل فإن :

$$\hat{R} \psi(\theta) = \psi(\theta + \alpha) \quad (3.7)$$

حيث α هي الازاحة الزاوية للجسيم عن موضعه الاصلى تحت تأثير تلك الماطة .
وبالتل نعبّر عن $\psi(\theta + \alpha)$ على الصورة التالية :

$$\psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta) + \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \psi(\theta) + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi(\theta) + \dots \quad (3.8)$$

$$\psi(\theta + \alpha) = \sum \frac{1}{n!} \alpha^n \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \psi(\theta) \quad (3.9)$$

$$\psi(\theta + \alpha) = \sum \frac{1}{n!} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^n \psi(\theta) \quad (3.10)$$

بمقارنة المعادلتين (3.4) و (3.10) نجد ان ماطة الازاحة الدورانية

مارة عن :

$$\hat{R} = e^{\alpha \frac{\partial}{\partial \theta}} \quad (3.11)$$

قواعد التبادل للمعاملات الخطية :

(Commutation Rules of Linear Operators)

سبق ان ذكرنا انه اذا اثرتا على دالة ψ بماطة خطية \hat{A} ثم اثرتا على الناتج $(\psi \hat{A})$ بماطة خطية اخرى \hat{B} فاننا نصل الى نتيجة ليست بالضرورية مطابقة لما يتقبل التأثير اولاً بالماطة \hat{B} على الدالة ψ ثم اثرتا على الناتج $\psi \hat{B}$ بالماطة \hat{A} اى انه ليس بالضرورية ان يكون

$$\hat{B}(\hat{A}\psi) = \hat{A}(\hat{B}\psi) \quad (3.12)$$

ويتضح ذلك من المثال التالي :

مثال (٣-٢) :

اذا فرضنا ان الماطة \hat{A} هي الماطة \hat{x}

والماطة \hat{B} هي الماطة $\frac{\partial}{\partial x}$

فيكون

$$\hat{B}\hat{A} = x \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p} \hat{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x} x \quad \text{بينما}$$

فإذا أثبتنا بهما على الدالة الاختيارية $f(x)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} (\hat{\alpha} \hat{p} - \hat{p} \hat{\alpha}) f(x) &= \left[x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} x \right] f(x) \\ &= x \frac{\partial}{\partial x} f(x) - \frac{\partial}{\partial x} (xf(x)) \\ &= x \frac{\partial f(x)}{\partial x} - x \frac{\partial f(x)}{\partial x} - f(x) \\ &= -1 \cdot f(x) \end{aligned}$$

وبحيث ان هذه النتيجة لاتعتمد على الدالة الاختيارية $f(x)$ فان

$$\left[x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} x \right] = -1 \quad (3.13)$$

في هذه الحالة يقال ان العاملين $\hat{\alpha}$ و \hat{p} لاتتبادلان (do not commute)

أما في الحالة الخاصة التي يحدث فيها أن :

$$\hat{\alpha} \hat{p} - \hat{p} \hat{\alpha} = +1 \quad (3.15)$$

فان $\hat{\alpha} \neq \hat{p}$ يقال انهما يتبادلان على التبادل

أنواع بواسون في ميكانيكا الكم :

(Poisson's Brackets in Quantum Mechanics)

عادة يُعبر عن الكميات $\hat{\alpha} - \hat{p}$ بالصورة الآتية $[\hat{\alpha}, \hat{p}]$ أي أن :

$$[\hat{\alpha}, \hat{p}] = \hat{\alpha} \hat{p} - \hat{p} \hat{\alpha} \quad (3.16)$$

نحسب الأقواس [] بأقواس التبادل
أو أقواس بواسون في ميكانيكا الكم .

وإذا كان الموتران \hat{A} و \hat{B} يتبادلان فإن :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \quad (3.17)$$

كما أنه يمكن إثبات العلاقات الآتية لأقواس بواسون بالنسبة لمجموعة ثلاثية من المماسلات الخطية : $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$:

$$\begin{aligned} \text{i) } [\hat{A}, \hat{B}] &= - [\hat{B}, \hat{A}] \\ \text{ii) } [\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}] \\ \text{iii) } [\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}] \\ \text{iv) } [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}] \hat{C} \\ \text{v) } [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A} [\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}] \hat{B} = - [\hat{C}, \hat{A}\hat{B}] \\ \text{vi) } [\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] &= [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

مثال (٤ - ٣) : اوجد بامكانه قوس بواسون للعاملتين (الموترين الديناميكيتين)

$$\hat{L}_+ = \hat{x} + \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \hat{L}_- = \hat{x} - \frac{\partial}{\partial x} \quad ; \quad \text{حيث } \hat{L} = \hat{L}_+ + \hat{L}_-$$

الحل :

لايجاد المطلوب في هذه الحالة نقر بقوس بواسون كوحدة على أي دالة اختيارية

$f(x)$ نكون لدينا :

$$\begin{aligned}
 [\hat{l}_+, \hat{l}_-] f(x) &= (\hat{l}_+ \hat{l}_- - \hat{l}_- \hat{l}_+) f(x) \\
 &= (x + \frac{\partial}{\partial x})(x - \frac{\partial}{\partial x}) f(x) - (x - \frac{\partial}{\partial x})(x + \frac{\partial}{\partial x}) f(x) \\
 &= (x + \frac{\partial}{\partial x})(xf(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x}) - (x - \frac{\partial}{\partial x})(xf(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}) \\
 &= x(xf(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(xf(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x}) \\
 &\quad - x(xf(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(xf(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}) \\
 &= x^2 f(x) - x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + f(x) - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \\
 &\quad - x^2 f(x) - x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + f(x) + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \\
 &= 2 f(x)
 \end{aligned}$$

$$\therefore [\hat{l}_+, \hat{l}_-] f(x) = 2 f(x) \quad (3.18)$$

وحيث أن هذه النتيجة حصلنا عليها باستخدام دالة اختيانية $f(x)$ يكون :

$$[\hat{l}_+, \hat{l}_-] = 2 \quad (3.19)$$

المعاملات الخطية القابلة لكمية الحركة الخطية :

(Linear Operators Corresponding to Angular Momentum Operators)

نعلم أن متجه كمية الحركة الزاوية \vec{L} يعرف بالعلاقة التالية :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (3.20)$$

(Position Vector) \vec{r} متجه الوضع حيث

\vec{p} متجه كمية الحركة الخطية

وبما لهذا التعريف ثابته في الاحداثيات الكرتيزية تأخذ المعادلة (3.20) الصورة التالية :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

$$\therefore \vec{L} = \vec{i} (yp_z - zp_y) + \vec{j}(xp_z - zp_x) + \vec{k}(xp_y - yp_x)$$

$$= \vec{i} L_x + \vec{j} L_y + \vec{k} L_z$$

تكون مركبات المتجه \vec{L} هي :

$$L_x = (yp_z - zp_y) : \quad (3.22a)$$

$$L_y = (xp_z - zp_x) \quad (3.22b)$$

$$L_z = (xp_y - yp_x) \quad (3.22c)$$

وبلى ذلك نحصل على المعاملات الخطية القابلة لتلك المركبات بالتعويض عن كل مركبات (p_x, p_y, p_z) وكذلك عن المركبات (x, y, z) لمتجه الموضع \vec{r} بمتجه كمية الحركة الخطية \vec{p} بما يقابل كل منها من عامل خطية :

$$x \rightarrow \hat{x}, y \rightarrow \hat{y}, z \rightarrow \hat{z},$$

$$p_x \rightarrow -1 \hbar \frac{\partial}{\partial x}, p_y \rightarrow -1 \hbar \frac{\partial}{\partial y}, p_z \rightarrow -1 \hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.23)$$

فنصل على :

$$\hat{L}_x = -1 \hbar (\hat{y} \frac{\partial}{\partial z} - \hat{z} \frac{\partial}{\partial y}) \quad (3.24)$$

$$\hat{L}_y = -1 \hbar (\hat{z} \frac{\partial}{\partial x} - \hat{x} \frac{\partial}{\partial z}) \quad (3.25)$$

$$\hat{L}_z = -1 \hbar (\hat{x} \frac{\partial}{\partial y} - \hat{y} \frac{\partial}{\partial x}) \quad (3.26)$$

إذاً، بوجه عام نحصل على :

$$\hat{L} = -1 \hbar (\hat{r} \times \hat{\nabla}) \quad (3.27)$$

وننتج عن هذه العلاقات عدة خصائص عامة لتلك الكمالات تتضح من الاظنة التالية :

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = 1 \hbar \hat{L}_z \quad \text{بطل (٢-٥) : انتهت ان :}$$

الحصل :

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = (\hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x)$$

ولكن :

$$\begin{aligned} \hat{L}_x \hat{L}_y &= (-1 \hbar)^2 \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= -\hbar^2 \left\{ \left[y \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] - \left[y \frac{\partial}{\partial z} \left(x \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[z \frac{\partial}{\partial y} \left(z \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] + \left[z \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \right\} \\ \therefore \hat{L}_x \hat{L}_y &= -\hbar^2 \left\{ yz \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} + y \frac{\partial}{\partial z} - yx \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right. \\ &\quad \left. - z^2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + xz \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

وبالتل يمكن اثبات ان :

$$\begin{aligned} \hat{L}_y \hat{L}_x &= -\hbar^2 \left\{ xz \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} - z^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - xz \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right. \\ &\quad \left. + xz \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} + x \frac{\partial}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

وبن (3.28) و (3.29) نحصل على :

$$\begin{aligned} (\hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x) &= -\hbar^2 \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= 1 \hbar \cdot 1 \hbar \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= 1 \hbar (-1 \hbar) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore [\dot{L}_x, \dot{L}_y] = 1 \hbar \dot{L}_z \quad (3.30)$$

وبالمثل فإنه يمكن اثبات أن :

$$[\dot{L}_y, \dot{L}_z] = 1 \hbar \dot{L}_x \quad (3.31)$$

$$[\dot{L}_z, \dot{L}_x] = 1 \hbar \dot{L}_y \quad (3.32)$$

وهذه النتائج توضح أن مركبات كمية التحرك الزاوي لا تتبادل مع بعضها ، بل تتبادل مع بعضها البعض .
نجد كمية الحركة L^2 يتصف بأنه يتبادل مع كل من تلك المركبات (L_x, L_y, L_z)
يتضح ذلك من المثال التالي :

$$[\dot{L}^2, \dot{L}_x] = 0 \quad \text{مثال (٣ - ١) : اثبت أن :}$$

$$\dot{L}^2 = \dot{L}_x^2 + \dot{L}_y^2 + \dot{L}_z^2 \quad \text{الحل : نعلم أن}$$

$$\begin{aligned} \therefore [\dot{L}^2, \dot{L}_x] &= (\dot{L}_x^2 \dot{L}_x - \dot{L}_x \dot{L}_x^2) \\ &= \dot{L}_x^2 \dot{L}_x + \dot{L}_y^2 \dot{L}_x + \dot{L}_z^2 \dot{L}_x - \dot{L}_x \dot{L}_x^2 - \dot{L}_x \dot{L}_y^2 - \dot{L}_x \dot{L}_z^2 \\ &= \dot{L}_y^2 \dot{L}_x + \dot{L}_z^2 \dot{L}_x - \dot{L}_x \dot{L}_y^2 - \dot{L}_x \dot{L}_z^2 \\ &= \dot{L}_y^2 \dot{L}_x - \dot{L}_y \dot{L}_x \dot{L}_y + \dot{L}_y \dot{L}_x \dot{L}_y - \dot{L}_x \dot{L}_y^2 \\ &\quad + \dot{L}_z^2 \dot{L}_x - \dot{L}_z \dot{L}_x \dot{L}_z + \dot{L}_z \dot{L}_x \dot{L}_z - \dot{L}_x \dot{L}_z^2 \\ &= \dot{L}_y (\dot{L}_y \dot{L}_x - \dot{L}_x \dot{L}_y) + (\dot{L}_y \dot{L}_x - \dot{L}_x \dot{L}_y) \dot{L}_y \\ &\quad + \dot{L}_z (\dot{L}_z \dot{L}_x - \dot{L}_x \dot{L}_z) + (\dot{L}_z \dot{L}_x - \dot{L}_x \dot{L}_z) \dot{L}_z \\ &= -1 \hbar \dot{L}_y \dot{L}_x - 1 \hbar \dot{L}_x \dot{L}_y + 1 \hbar \dot{L}_z \dot{L}_y + 1 \hbar \dot{L}_y \dot{L}_z = 0 \\ \therefore [\dot{L}^2, \dot{L}_x] &= 0 \quad (3.33) \end{aligned}$$

والمثل يمكن اثبات ان :

$$[\hat{L}_x^2, \hat{L}_y] = 0 \quad (3.34)$$

$$[\hat{L}_x^2, \hat{L}_z] = 0 \quad (3.35)$$

وباتباع نفس الطريقة يمكن اثبات العلاقات الآتية :

$$[\hat{L}_x, \hat{x}] = 1 \hbar \hat{y} \quad (3.36)$$

$$[\hat{L}_x, \hat{y}] = -1 \hbar \hat{x} \quad (3.37)$$

$$[\hat{L}_x, \hat{z}] = 0 \quad (3.38)$$

$$[\hat{L}_x, \hat{p}_x] = +1 \hbar \hat{p}_y \quad (3.39)$$

$$[\hat{L}_x, \hat{p}_y] = -1 \hbar \hat{p}_x \quad (3.40)$$

$$[\hat{L}_x, \hat{p}_z] = 0 \quad (3.41)$$

$$[\hat{L}_y, \hat{p}_x] = 0 \quad (3.42)$$

$$[\hat{L}_y, \hat{p}_y] = +1 \hbar \hat{p}_z \quad (3.43)$$

$$[\hat{L}_y, \hat{p}_z] = -1 \hbar \hat{p}_y \quad (3.44)$$

$$\hat{L}_+ \hat{L}_+ = \hat{L}_x^2 - \hat{L}_y^2 - \hbar \hat{L}_z \quad (3.45)$$

$$\hat{L}_+ \hat{L}_- = \hat{L}_x^2 - \hat{L}_y^2 + \hbar \hat{L}_z \quad (3.46)$$

حيث

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + 1 \hbar \hat{L}_y \quad (3.47)$$

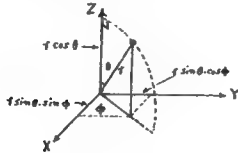
$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - 1 \hbar \hat{L}_y \quad (3.48)$$

كما يمكن باستخدام العلاقة (٤) ، (*) من المعادلة (3.17) إثبات أن :

$$[x, p^n] = i \hbar n p^{n-1} \quad (3.49)$$

مركبات كمية الحركة الزاوية في الإحداثيات الكروية :

The Components of the Angular-Momentum Operator in Spherical Coordinates



شكل (١-٣) توضيح العلاقة بين الإحداثيات الكرية والإحداثيات الكرتيزية .

من المعلوم أن معادلات الإحداثيات التي تربط بين الإحداثيات الكروية

(x, y, z) والإحداثيات الكرتيزية (r, θ, φ) تكتب على الصورة الآتية :

$$x = r \sin \theta \cdot \cos \phi \quad (3.50)$$

$$y = r \sin \theta \cdot \sin \phi \quad (3.51)$$

$$z = r \cos \theta \quad (3.52)$$

وهذه المعادلات تُعبر عن الإحداثيات الكرتيزية بدلالة الإحداثيات الكرية .

ولكن معادلات التحويل المعكوسة التي تُعبر عن الاحداثيات الكروية بدلالة
الاحداثيات الكرتيزية تكتب على الصورة :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.53)$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{r} = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (3.54)$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (3.55)$$

$$r \sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.56)$$

ولدينا ايضا العلاقات الهامة الاتية :

$$(\arcsin v)' = + \frac{v'}{\sqrt{1-v^2}} \quad (3.57)$$

$$(\arccos v)' = - \frac{v'}{\sqrt{1-v^2}} \quad (3.58)$$

$$(\arctan v)' = + \frac{v'}{1+v^2} \quad (3.59)$$

$$(\operatorname{arccot} v)' = - \frac{v'}{1+v^2} \quad (3.60)$$

واستخدام العلاقات من (3.53) الى (3.60) يمكن اثبات ان :

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \phi \end{aligned} \right. \quad (3.61)$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \right. \quad (3.62)$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{r} = \cos \theta \end{aligned} \right. \quad (3.63)$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= - \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \end{aligned} \right. \quad (3.64)$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= - \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \end{aligned} \right. \quad (3.65)$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= - \frac{\sin \theta}{r} \end{aligned} \right. \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r \sin \phi} \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r \sin \phi} \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (3.69)$$

وكذلك يمكن استخدام العلاقات الآتية :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.72)$$

للحصول على النتائج الآتية :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\sin \theta}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos \theta}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.75)$$

والتميز من المعادلات (3.73) ، (3.74) ، (3.75) في المعادلات (3.24) ،

(3.25) ، (3.26) يمكن الحصول على مركبات طائلة كمية الحركة الزاوية في الإحداثيات

الكرية على الصورة الآتية :

$$\hat{L}_x = i \hbar (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi} + \cot \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \quad (3.76)$$

$$\hat{L}_y = i \hbar (-\cos \theta \frac{\partial}{\partial \phi} + \cot \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \quad (3.77)$$

$$\hat{L}_z = -i \hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.78)$$

يضع ذلك من المثال التالي :

مثال (٧-٢) : اوجد المركبة I_y في الاحداثيات الكروية

الحل :

$$\begin{aligned} \hat{I}_y &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= -i\hbar \left\{ r \cos \theta \left(\sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} - r \sin \theta \cos \phi \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \} \\ \therefore \hat{I}_y &= -i\hbar \left\{ \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} \end{aligned}$$

مثال (٨-٢) : اثبت ان :

$$\hat{L}_+ = \hbar e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

حيث كما سبق ان افردنا

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i \hat{L}_y$$

الاثبات : نعرض عن I_x و I_y كما يليهما في الاحداثيات الكروية نحصل على :

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + i\hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= \hbar \left[i \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right. \\ &\quad \left. + \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ &= \hbar (\cos \phi + i \sin \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} + \hbar (i \cot \theta (\cos \phi + i \sin \phi) \frac{\partial}{\partial \phi}) \\ &= \hbar e^{i\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} + i\hbar \cot \theta e^{i\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

$$\therefore \hat{L}_+ = \hbar e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (3.75)$$

بالمثل يمكن اثبات ان :

$$\hat{L}_- = \hbar e^{-i\theta} \left(1 \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (3.80)$$

$$\hat{L}_z = (\hat{L}_x - i \hat{L}_y) \quad \text{حيث كما سبق ان افردنا :}$$

مثال (١-٣) : اثبت ان عامة موج كمية التحرك الزاوي الكلى بدلالة الاحداثيات الكروية هارة عن :

$$L^2 = -\hbar^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.81)$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad \text{الحل : بما ان}$$

اذنا بالتعويض من المعادلات (3.76) ، (3.77) ، (3.78) نحصل على :

$$\begin{aligned} L^2 &= -\hbar^2 \left[\left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \\ &= -\hbar^2 \left[\sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\cot \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \right. \\ &\quad \left. + \cot \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \cot^2 \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\cot \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \right. \\ &\quad \left. - \cot \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \right. \\ &\quad \left. + \cot^2 \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L^2 &= h^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \\
 &= -h^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + (\cot^2 \theta + 1) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \\
 \therefore L^2 &= -h^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (3.81)
 \end{aligned}$$

مثال (١٠-٢) : اثبت ان المعادلة ∇^2 ترتبط بالمعادلة L^2 بالصورة التالية :

$$\nabla^2 = \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{L^2}{h^2 r^2} \right\} \quad (3.82)$$

الحل :

$$\therefore \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

اذن بالتعويض عن $\frac{\partial}{\partial x}$ ، $\frac{\partial}{\partial y}$ ، $\frac{\partial}{\partial z}$ من العلاقات (3.73) ، (3.71) ، (3.75) نحصل على :

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 &= (\sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi})^2 \\
 &+ (\sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sin \phi \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi})^2 \\
 &+ (\cos \theta \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta})^2
 \end{aligned}$$

وباستخدام نفس خطوات الحل في المثال السابق (3.9) نجد ان :

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) \\
 &+ \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \quad (3.83)
 \end{aligned}$$

ولكن من معادلة (3.81) في المثال السابق نجد ان :

$$\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} = - \frac{L^2}{\hbar^2} \quad (3.84)$$

وهذا معناه ان ∇^2 ترتبط بمعادلة مع كمية الحركة الزاوية الكلية لمجموعة ما على الصورة التالية :

$$\nabla^2 = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \right] \quad (3.82)$$

نود ان نشير الى ان هذه النتيجة (3.82) بجانب عدد من النتائج التي وصلنا اليها في هذا الباب سوف نستفيد منها عند دراستنا لمسألة ذرة الايدروجين في الباب السادس باذن الله سبحانه وتعالى .

شمال (٣ - ١١) :

اوجد ما يحاط به المعادلة :

$$\left[\frac{1}{\hbar} \vec{\nabla} + \vec{A}(\vec{r}) \right]^2$$

حيث كلا من \vec{A} و $\vec{\nabla}$ متجه .

الحـلـ :

بجعل هذه المعادلة تؤثر على دالة اختيارية ψ (كمية قياسية) نجد ان :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\hbar} \vec{\nabla} + \vec{A} \right]^2 \\ &= \left[\frac{1}{\hbar} \vec{\nabla} + \vec{A} \right] \times \left[\frac{1}{\hbar} \vec{\nabla} + \vec{A} \right] \psi \\ &= \left[\frac{1}{\hbar} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right] \times \left[\frac{1}{\hbar} \vec{\nabla} \psi + \vec{A} \psi \right] \\ &= \left[\frac{1}{\hbar} \vec{\nabla} + \vec{A} \right] \times \left[\frac{1}{\hbar} \vec{\nabla} \psi + \vec{A} \psi \right] \end{aligned}$$

- ١٨ -

$$\begin{aligned}
 &= \hbar \vec{\nabla} \left[\hbar \vec{g} \text{grad} \psi + \vec{A} \psi \right] + \vec{A} \left[\hbar \vec{g} \text{grad} \psi + \vec{A} \psi \right] \\
 &= -\hbar^2 \nabla^2 \psi + \hbar \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \psi + \vec{A} \vec{\nabla} \psi \\
 &\quad + \hbar \vec{A} \vec{\nabla} \psi + \vec{A}^2 \psi \\
 &= (-\hbar^2 \nabla^2 + \hbar \text{div} \vec{A} + 2 \hbar (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) + \vec{A}^2) \psi \\
 \therefore (\hbar \nabla + \vec{A})^2
 \end{aligned}$$

$$= -\hbar^2 \nabla^2 + \hbar \text{div} \vec{A} + 2 \hbar (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) + \vec{A}^2$$

مثال (٣ - ٧) :

وضح ما اذا كانت الحركة p_x كمية التحرك الخطي قيمتها الترقمة حقيقية ام لا .

الحل :

من الترميم العام للقيمة الترقمة فان :

$$\langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(-\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \, dV \quad (dV = d^3 x)$$

وطى اساميان الحزمة الموجية متجهة ناحية الحور x

$$\therefore \langle p_x \rangle = \int \psi^* \left(-\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \, dx$$

$$= -\hbar \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \left[\psi^* \psi \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} dx = 0 - \int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} dx$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} dx = 0$$

وبمعنى هذه النتيجة أن
تخيلية مطلق وعلى ذلك

$$\therefore \langle p_x \rangle = 1 \hbar \times (\text{كمية تخيلية مطلق}) = \text{كمية حقيقية}$$

مثال (2-3) :

$$\frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

وضح ان :

حيث V دالة الجهد

الحل :

بيان :

$$\langle p_x \rangle = -1 \hbar \cdot \int \frac{\partial \psi}{\partial x} d^3r$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = -1 \hbar \frac{d}{dt} \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} d^3r$$

$$= -1 \hbar \left[\int \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} d^3r + \int \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} d^3r \right]$$

- ٧٠ -

ولكن

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V \psi^*$$

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi$$

إذا :

$$\frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = \int \psi^* \left[V \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (V \psi) \right] d^3x$$

حيث تم تحويل الجزء الآخر من الطرف الايمن الى تكامل سطح يقول مقداره الصفر.

$$\therefore \frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = - \int \psi^* \frac{\partial V}{\partial x} \psi d^3x = \langle - \frac{\partial V}{\partial x} \rangle$$

الباب الرابع

استخدام معادلة شروينجر في معالجة بعض الظواهر الفيزيائية
المرتبطة بحركة جسيمات داخل حيز به حواجز جهدية

الباب الرابع

استخدام معادلة شرودنجر في معالجة بعض الظواهر الفيزيائية
المرتبطة بحركة جسيمات داخل حيز به حواجز جهدية

١ - حركة جسيم حر : The Free-Particle Motion

هي حركة جسيم داخل حيز يتميز بأن طاقة الوضع V داخله تساوي صفراً .
وفي هذه الحالة تكون الطاقة الكلية لهذا الجسيم E تساوي طاقة حركته أى أن :

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (4.1)$$

وتكون المعادلة الهاميلتونية عبارة عن :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad (4.2)$$

وبنى ذلك تأخذ معادلة شرودنجر التي تصف تلك الحركة الحرة للجسيم المستمرة
التالية :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) \quad (4.3)$$

وافتراض أن دالة الحالة $\psi(x,t)$ يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب دالتين
أحدهما $\phi(x)$ والاخرى $\xi(t)$ أى أن :

$$\psi(x,t) = \phi(x) \xi(t) \quad (4.4)$$

إذاً بالتعويض من (4.4) في (4.3) نحصل على :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \xi(t) \nabla^2 \phi(x) = i\hbar \phi(x) \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \quad (4.5)$$

ونقسمه طرفي هذه المعادلة على الدالة $\psi(x,t)$ نحصل على :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\phi(x)} \nabla^2 \phi(x) = i\hbar \frac{1}{\xi(t)} \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \quad (4.6)$$

ونلاحظ في هذه المعادلة ان الطرف الايمن منها دالة للمتغير « t » فقط بينما الطرف الايسر منها دالة للمتغير « x » فقط وحيث ان كلا منهما يعاين الاخر لجميع قيم « t » ، « x » فان هذا يعني لا يتحقق الا اذا كان كل منهما يعاين بقدارا ثابتا مشتركا ونرمز له بالرمز « W » . وعلى ذلك فان معادلة (4.6) تؤدي الى المعادلتين التاليتين :

$$1 \pm \frac{d \xi(t)}{dt} = W \xi(t) \quad (4.7)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi(x) = W \phi(x) \quad (4.8)$$

من المعادلة (3.7) نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{d \xi(t)}{\xi(t)} &= -\frac{1}{\hbar} W dt \\ \therefore \xi(t) &= \xi(0) e^{(-1/\hbar) W t} \end{aligned} \quad (4.9)$$

وحيث ان الـ « $(-1/\hbar) W$ » لا بد وان يكون بلا أبعاد (Dimensionless) فهذا معناه ان القدار الثابت « W » له نفس ابعاد الطاقة . أي ان وحدته هي الجول . ولذا تسمى « W » بمعامل الطاقة (Energy Factor) . والان بإعادة ترتيب المعادلة (3.8) نحصل على :

$$\nabla^2 \phi(x) + \frac{2mW}{\hbar^2} \phi(x) = 0 \quad (4.10)$$

$$\therefore \nabla^2 \phi(x) + k^2 \phi(x) = 0 \quad (4.11)$$

حيث « $k^2 = 2mW/\hbar^2$ » . والحل العام للمعادلة هو الصورة التالية :

$$\phi(x) = A e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (4.12)$$

وهذا الحل يمثل حركة موجة مستوية (Plane-Wave Motion) تتجهز باتجاه انتشار الموجة « k » (Propagation Vector) والذي يكون عموديا على مصدر الموجة المستوية .

وطى ذلك فان الحل العام لمعادلة شرودنجر التى تمثل حركة الجسم الحر هو

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} \quad (4.13)$$

وتضح من هذه النتيجة ان تلك الحركة تعتمد على الزمن بجانب اعتمادها على

احداثيات الموضع .

٢ - حركة جسم داخل صندوق مغلق :

(Motion of a Particle Inside a Closed Box)

فى هذه الحالة نعتبر حركة جسم داخل حيز يكون الجهد فيه مساويا للصفر (اى انها تشبه حركة الجسم الحر) ولكن هذا الحيز يتميز بانه محدد بجدران تبلغ قيمة الجهد عند ها فجأة الى ما لا نهاية وهذا معناها انه من المستحيل تواجد الجسم عند تلك الجدران وبالتالي عدم تواجده خارجها ايضا . وهذا ما نقصد به ان الصندوق الذى يتحرك داخله الجسم مغلق . واختار ان الحركة فى ثلاث ابعاد (x, y, z) فانه يمكننا التمييز عن الشروط الحدية التى تتميز الجهد الذى يتعرض له هذا الجسم أثناء حركته داخل الصندوق كما يلى :

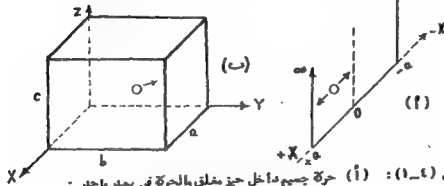
اولا : داخل الصندوق

$$V = 0 \quad \text{for} \quad |x| < a, |y| < b, |z| < c \quad (4.14)$$

$$V = \infty \quad \text{for} \quad |x| \geq a, |y| \geq b, |z| \geq c \quad (4.15)$$

وبحيث ان الطاقة الكلية للجسيم لا تعتمد على الزمن حيث انه معزول عن أى مؤثرات خارجية لذلك فاننا نتحبدل عامل الطاقة $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ هناك بالطاقة الكلية E التى تعادلها . وطى ذلك فان الدالة الموجية لا تعتمد على احدى الزين وهذا

١- كتابة الشروط الحدية الخاصة بتلك الدالة على الصورة التالية :



- شكل (١-٤) : (أ) حركة جسيم داخل حيز مغلق والحركة في بعد واحد .
(ب) حركة جسيم داخل حيز مغلق والحركة في ثلاث ابعاد .

$$\psi(x, y, z) = \psi(x, y, z) \text{ for } |x| < a, |y| < b, |z| < c \quad (4.16)$$

$$\psi(x, y, z) = 0 \text{ for } |x| \geq a, |y| \geq b, |z| \geq c \quad (4.17)$$

وبلذلك فان معادلة شرودنجر التي تصف حركة الجسيم في هذه الحالة تأخذ الصورة التالية :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z) \quad (4.18)$$

حيث

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m} = \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \right) \quad (4.19)$$

والان يتاح نفس الاحلوب في فصل المتغيرات الذي حللناه في معادلة حركة الجسيم الحر فانه بالتعبير عن الدالة الموجية بالصورة التالية :

$$\psi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \quad (4.20)$$

نحصل من المعادلة (4.18) على ثلاث معادلات هي :

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{2mRx}{\hbar^2} X(x) = \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_1^2 X(x) = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{2mRy}{\hbar^2} Y(y) = \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_2^2 Y(y) = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \frac{2mRz}{\hbar^2} Z(z) = \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k_3^2 Z(z) = 0 \quad (4.23)$$

كل منها يمثل معادلة شرودنجر لحركة الجسم في بعد واحد داخل الصندوق .

(Schrodinger equation for one-dimensional motion inside a box)

والحل العام لاى منها ولكن المعادلة الاولى منها هو :

$$X(x) = A e^{+ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} \quad (4.24)$$

وتطبق الشرط الحدى الذى يعنى على انه عند $x = -a$ تكون $X = 0$
نحصل على :

$$\begin{aligned} 0 &= A e^{-ik_1 a} + B e^{+ik_1 a} \\ \therefore A e^{-ik_1 a} &= -B e^{+ik_1 a} \\ \therefore A &= -B e^{+2ik_1 a} \end{aligned} \quad (4.25)$$

وتطبق الشرط الحدى الاخر الذى يعنى على انه عند $x = +a$ تكون $X=0$
نحصل على

$$\begin{aligned} 0 &= A e^{+ik_1 a} + B e^{-ik_1 a} \\ \therefore A &= -B e^{-2ik_1 a} \end{aligned} \quad (4.26)$$

ونقسم المعادلة (4.25) على المعادلة (4.26) نحصل على :

$$1 = + e^{4ik_1a} = (e^{2ik_1a})^2$$

$$\therefore e^{2ik_1a} = \pm 1 \quad (4.27)$$

ولنأخذ مثلا الاشارة الموجبة :

$$e^{2ik_1a} = +1 \quad (4.28)$$

$$\therefore \cos 2k_1a + i \sin 2k_1a = +1$$

$$\therefore 2k_1a = n_x$$

حيث $n_x = 0, 2, 4, \dots$ أى عدد زوجي

$$\therefore k_1 = \frac{n_x \cdot \pi}{2a}$$

$$\therefore k_1^2 = \frac{n_x^2 \cdot \pi^2}{4a^2} = \frac{2m E_x}{\hbar^2}$$

وبما أن طاقة الجسم المرتبطة بحركته في اتجاه الاحداثى x تعطى بالعلاقة

$$E_x = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} \cdot n_x^2 \quad (4.29)$$

مع استبعاد القيمة $n_x = 0$

وبالتعويض من المعادلة (4.28) في المعادلة (4.25) نجد أن :

$$A = -B \quad (4.30)$$

وبالتالي فإن المعادلة (4.24) تؤدي الى النتيجة التالية :

$$X(x) = A (e^{+ik_1x} - e^{-ik_1x}) \quad (4.31)$$

$$\therefore X(x) = 2A \cdot i \cdot \sin k_1x$$

$$\therefore X(x) = 2A i \sin \frac{n_x \pi}{2a} x \quad (4.32)$$

وهذه الدالة تتميز بانها دالة غير متناظرة (Antisymmetrical Function)

كما يوضح ذلك الشكل (٤-٢)



شكل (٤-٢) توضح مستويات الطاقة والدوال الموجية الثلاث الأولى لحركة جسيم داخل حيز مغلق.

ومن ناحية أخرى لو أخذنا الإشارة السالبة في معادلة (4.27) بمعنى أن :

$$e^{2ik_1a} = -1 \quad (4.33)$$

فيكون

$$\cos 2k_1a + i \sin 2k_1a = -1$$

$$\therefore 2k_1a = n\pi$$

حيث $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ أي عدد فردي

في هذه الحالة تكون مستويات الطاقة هي :

$$E_n = \frac{h^2}{8ma^2} n^2$$

حيث n تأخذ القيمة $1, 3, 5, 7, \dots$ على التتابع .

وبالتعويض من (4.33) في المعادلة (4.25) نجد أن :

$$A = +B$$

وبنى ذلك تأخذ الدالة الموجية الصورة التالية :

$$X(x) = A (e^{+ik_1x} + e^{-ik_1x})$$

$$\therefore X(x) = 2A \cos k_1x$$

$$\therefore X(x) = 2A \cos \frac{n\pi}{2a} x \quad (4.37)$$

وهذه الدالة تتميز بانها دالة

متناظرة (Symmetrical)

كما هو موضح بالرسم .

ويتبقى لدينا معرفة قيمة الثابت A لاحتمال معلوماتنا عن الدالة $X(x)$ ويمكن اتمام ذلك بتطبيق خاصية المعايرة التي تتميز بها الدالة الموجية . ناذنا اخذنا النتيجة (4.32) فاننا نحصل على :

$$\int_{-a}^{+a} (-2 A \sin \frac{n_x \pi}{2a} x) \cdot (2 A \sin \frac{n_x \pi}{2a} x) dx = 1$$

$$\therefore 4 A^2 \int_{-a}^{+a} \sin^2 \frac{n_x \pi}{2a} x dx = 1$$

$$\therefore 4 A^2 \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{n_x \pi}{a} x) dx = 1$$

$$\therefore 2 A^2 \left[\int_{-a}^{+a} dx - \int_{-a}^{+a} \cos \frac{n_x \pi x}{a} dx \right] = 1$$

$$\therefore 2 A^2 [2a - 0] = 1$$

$$\therefore A = \pm \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad (4.38)$$

وبذلك فان الدالة الغير متناظرة تأخذ الصورة التالية :

$$X(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{n_x \pi}{2a} x, \quad n_x = 2, 4, 6, \dots \quad (4.39)$$

بينما الدالة المتناظرة تكون على الصورة التالية :

$$X(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{n_x \pi}{2a} x, \quad n_x = 1, 3, 5, \dots \quad (4.40)$$

وباختيار مركبات حركة الجسم في الاتجاهين x و y نحصل على التأثير التالية :

$$Y(y) = \pm \frac{1}{\sqrt{b}} \sin \frac{n_y \pi}{2b} y \quad (4.41)$$

أو

$$Y(y) = \pm \frac{1}{\sqrt{b}} \cos \frac{n_y \pi}{2b} y \quad (4.42)$$

وتقابل مستويات الطاقة

$$E_y = \frac{n_y^2 \pi^2}{8 m b^2} \quad (4.43)$$

ذلك بالنسبة للاحداثي y .

بينما للاحداثي x نحصل على :

$$X(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{c}} \sin \frac{n_x \pi}{2c} x \quad (4.44)$$

$$X(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{c}} \cos \frac{n_x \pi}{2c} x \quad (4.45)$$

والتي تقابل مستويات الطاقة

$$E_x = \frac{n_x^2 \pi^2}{8 m c^2} \quad (4.46)$$

وعلى ذلك فالدالة الموجية تكتب على إحدى الصورتين الآتيتين :

بالنسبة للدالة الغير متناظرة فإن :

$$(\psi)_{n_x, n_y, n_z} = \pm \frac{1}{\sqrt{abc}} (\sin \frac{n_x \pi}{2a} x) (\sin \frac{n_y \pi}{2b} y) (\sin \frac{n_z \pi}{2c} z) \quad (4.47)$$

بينما الدالة المتناظرة تأخذ الصورة التالية :

$$(\psi)_{n_x, n_y, n_z} = \pm \frac{1}{\sqrt{abc}} (\cos \frac{n_x \pi}{2a} x) (\cos \frac{n_y \pi}{2b} y) (\cos \frac{n_z \pi}{2c} z) \quad (4.48)$$

وتكون مستويات الطاقة المقابلة هي :

$$E = \frac{\pi^2 \pi^2}{8 m} \left\{ \frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right\} \quad (4.49)$$

درجة عدم الانتظام : (The Degree of Degeneracy)

نتيجة مباشرة للمعادلة (4.49) هناك احتمالان :

١ - إذا كان الصندوق على شكل متوازي مستطيلات فيه $a \neq b \neq c$ فإن لكل مستوى طاقة E توجد دالة موجية (x, y, z) لها واحدة فقط تتنسى إليه ويسمى هذا المستوى في مثل هذه الحالة بمستوى غير منكسر ونصف بدرجة عدم انتظامه مقدارها الوحدة .

٢ - بينما إذا حدث أن تساوت الأبعاد أى أن $a = b = c$ بمعنى أن الصندوق الذى يتحرك داخله الجسم كان على شكل مكعب فإن مستوى الطاقة E تصبح معادلته على الصورة التالية :

$$E = \frac{h^2 \pi^2}{8 m a^2} \left[n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \right] \quad (4.50)$$

فإذا فرضنا على سبيل المثال أن أعداد الكم n_x و n_y و n_z كان لها القيم التالية : $n_x = 3, n_y = 2, n_z = 4$ فمعنى هذا أن قيمة مستوى الطاقة E هي

$$\begin{aligned} E &= \frac{h^2 \pi^2}{8 m a^2} \left[(3)^2 + (2)^2 + (4)^2 \right] \\ \therefore E &= \frac{h^2 \pi^2}{8 m a^2} \left[9 + 4 + 16 \right] \\ \therefore E &= \frac{h^2 \pi^2}{8 m a^2} \times 29 \end{aligned} \quad (4.51)$$

وهذا المستوى يتأهل الدالة الموجية $\Psi_{324}(x, y, z)$ ولكن نفس القيم للطاقة E نحصل عليها بالنسبة للدوال

234	324	423
243	342	432

وما انه في هذا المثال هناك ست دوال جميعها يتنص لستوى طاقة واحد وهو
المعطى بالمعادلة (4-51) لذا يسمى هذا المستوى بمستوى متكرومتصف
بدرجة عدم اتناء مقدارها ستة • والجداول الاتى يجمع بعض الامثلة :

$\frac{8\pi^2 B}{h^2} = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$	n_x	n_y	n_z	درجة عدم الاتناء
3	1	1	1	1
6	1 1 2	1 2 1	2 1 1	3
14	1 1 2 2 3 3	2 3 3 1 1 2	3 2 1 3 2 1	6
29	2 2 3 3 4 4	3 4 2 4 2 3	4 3 4 2 3 2	6

ملحوظة خاصة بالملافة (4.50) :

١ - باعتبار ان الجسم الذى يتحرك داخل الصندوق هو إلكترون داخل ذرته
الامعنى ذلك ان الكتلة m تساوى $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ بينما الابعاد
(a, b, c) هى فى حدود الأنجستروم (Angstrom) أى (10^{-10} m)
وعلى ذلك نحصل على مستويات طاقة E فى حدود الإلكترون فولت
وهذا يعقل الواقع الفيزيائى لمستويات الطاقة لاي إلكترون داخل الذرة .

٢ - باعتبار ان الجسم الذى يتحرك داخل الصندوق هو نيوكلون (Nucleon)
اى بروتون او نيوترون داخل النواة الذرية فمعنى ذلك ان الكتلة m
تساوى $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ (1837 x 9.1 x 10⁻³¹) بينما الابعاد (a, b, c) هى
فى حدود الفيرمى (Fermi) أى (10^{-15} metre) . وعلى ذلك نحصل
على مستويات طاقة E فى حدود ملايين الإلكترون فولت . وهذا يعقل
الواقع الفيزيائى لمستويات الطاقة لاي نيوكلون داخل النواة .

٣ - باعتبار ان الجسم الذى يتحرك داخل الصندوق هو جسم عادى أى كتلة
حدود الجرام بينما ابعاد الصندوق هى الابعاد المعتادة فى الفيزياء
الكلاسيكية أى فى حدود المليمتر فان التمهيز السابق فى المعادلة (4.50)
تعطينا القيم التالية :

$$E = \frac{h^2 \pi^2}{8m} \left[\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right]$$

$$= \frac{(1.05 \times 10^{-34})^2 \times (3.14)^2}{8 \times 10^{-3} \times 10^{-2}} \left[n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \right]$$

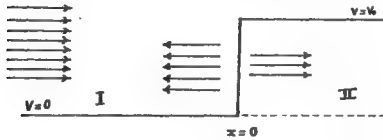
$$\sim 10^{-63} \left[n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \right]$$

وعلى ذلك فان مستويات الطاقة هى ضاغط المقدار المتناهي فى الصغر
(10^{-63} Joule) وهذا يوضح بجله ان لمثل هذه الاجسام المادية التى تحوى عددا

هائلا من الذرات (وهي مانس بالاجسام الماكروسكوبية) تكون مميزات الطاقة الخاصة بها متصلة ومن استنحول التمييز بينها تجريبيا وعلى ذلك لانتخدم ميكانيكا الكم في معالجة مثل هذه الاجسام .

حركة جسيم (أو حزمة من الجسيمات) تجاه حاجز جهدي (Potential Barrier)

(أو سلالة جهدية Potential Step) :



شكل (٣-٤) حزمة من الجسيمات متجهه ناحية سلمية جهدية حيث بعضها يتمكس والمغزى الآخر ينفذ .

لنفرض أن لدينا سلالة جهدية كالبيئة بالشكل (٣-٤) يتحرك ناحيتها من جهة اليسار حزمة متجانسة من الجسيمات لها الشكل التالي :

$$\psi_{inc} = A \exp(i k_1 x / \hbar) = A e^{i k_1 x} \quad (4.52)$$

ولنتحدث تأثير وجود تلك السلالة الجهدية على حركة هذه الحزمة .

نستطيع أن نكتب المعادلة الموجية التي تنحل حركة الجسيمات داخل كل من المنطقتين

(I) و (II) الموضحتين بالشكل على النحو التالي :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_I}{dx^2} = E \psi_I, \quad \text{for } x < 0 \quad (4.53)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} = (E - V_0) \psi_{II}, \quad \text{for } x \geq 0 \quad (4.54)$$

حيث E الطاقة الكلية للجسم • v_0 ارتفاع جهد السلة •
يجب علينا ان نميز بين حالتين :

الحالة الاولى : عندما تكون E اكبر من v_0 :

عندما تكون الطاقة الكلية E اكبر من طاقة الوضع v_0 (ارتفاع جسم - السلة) فان طاقة حركة الجسم $(E - v_0)$ تكون موجبة وبالتالي تكون سرعة - الجسم حقيقية •

وطيه تبعاً للميكانيكا الكلاسيكية تستطيع جميع الجسيمات القادمة تجاه السلة ان تتخطاها الى المنطقة الثانية (II) اى انه لا يوجد دقاتى منعكسة الى المنطقة الاولى (I) • بينما متوضـح لنا ميكانيكا الكم وجوب احتمال انعكاس بعض هذه الدقائق الى المنطقة الاولى متحركة في عكس اتجاه الحزمة الاصلية القادمة تجاهها السلة •

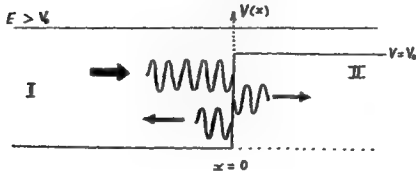
الحالة الثانية : عندما تكون E اصغر من v_0 :

عندما تكون الطاقة الكلية E للجسم اصغر من طاقة الوضع v_0 فان طاقة حركته $(E - v_0)$ تكون مقداراً سالباً وطيه تكون سرعته في المنطقة الثانية بمقداراً تخيلاً وبالتالي استحالة وجودها في هذه المنطقة تبعاً للميكانيكا الكلاسيكية اى انها تنعكس تماماً مرتدة الى المنطقة القادمة منها اى المنطقة الاولى •

من ناحية اخرى فان اساسيات ميكانيكا الكم توجب احتمال نفاذ بعض هذه الدقائق الى المنطقة الثانية •

ولتبدأ بدراسة تلك الحالتين كل على حدة :

الحالة الأولى : $E > V_0$ أكبر من V_0



شكل (٤-٤) حاجز جهدي ارتفاعه اقل من طاقة حركة أى من الجسيمات المتجهة ناحيته

في المنطقة الأولى فإن حل المعادلة (4.53) التي تمثل حركة الجسيمات فيها يأخذ الصورة التالية :

$$\psi_I = A e^{+ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}, \quad x < 0 \quad (4.55)$$

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (4.56) \quad \text{حيث}$$

كما ان الحل (4.55) يتكون من جزئين هما $(Ae^{+ik_1 x})$ ومثل حركة الجسيمات في المنطقة الأولى المتجهة تجاه اليمين ، الجزء الآخر هو $(Be^{-ik_1 x})$ ومثل حركة الجسيمات في المنطقة الأولى في اتجاه عكس اتجاه حركة الجسيمات القادمة . وذلك نتيجة انعكاسها عند الملعبة الجهدية .

اما حل المعادلة (4.54) التي تمثل حركة الجسيمات في المنطقة الثانية يأخذ الصورة التالية :

$$\psi_{II} = C e^{+ik_2 x} + D e^{-ik_2 x} \quad (4.57)$$

$$k_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} > 0 \quad (4.58) \quad \text{حيث}$$

ونلاحظ في المعادلة (4.57) ضرورة وضع الثابت D مساويا للصفر سبب ذلك نهائيا عدم وجود منابع للجسيمات في المنطقة الثانية تكون حركتها تجاه اللمسة الجهدية . فإذ على ذلك عدم وجود أي حاجز جهدي آخر يولد عنده بعض الجسيمات التي تخطت السلة الجهدية الأولى . وعليه تصبح المعادلة (4.57) على الصورة التالية :

$$\psi_{II} = C e^{+ik_2 x}, \quad x > 0 \quad (4.59)$$

وتطبق الشروط الحدية لدالة الحالة ψ والمفتقة التفاضلية الأولى لها والتي تنص على :

$$(\psi_I)_{x=0} = (\psi_{II})_{x=0} \quad (4.60)$$

$$(\psi'_I)_{x=0} = (\psi'_{II})_{x=0} \quad (4.61)$$

نحصل على :

$$A + B = C \quad (4.62)$$

$$k_1 A + k_1 B = k_2 C \quad (4.63)$$

وبحيث أن الثابت A معلوم من ظروف التجربة لذلك فإن من حل المعادلتين (4.62) و (4.63) نحصل على قيمة كل من الثابتين C و B بدلالة الثابت A على النحو التالي :

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \cdot A \quad (4.64)$$

$$C = \frac{2 k_1}{k_1 + k_2} \cdot A \quad (4.65)$$

وتميز معامل الانعكاسية (Reflection Coefficient) R للسلة الجهدية على الصورة التالية :

$$R = \frac{\text{شدة التيار المنعكس} \cdot \text{شدة السلة الجهدية}}{\text{شدة التيار الساقط عليها}} \quad (4.66)$$

$$\therefore R = \frac{|(B \cdot e^{-ik_1 x}) \cdot (B \cdot e^{-ik_1 x})| \cdot v_I}{|(A \cdot e^{+ik_1 x}) \cdot (A \cdot e^{+ik_1 x})| \cdot v_I}$$

$$= \frac{|B|^2}{|A|^2} \quad (4.67)$$

حيث v_I هي سرعة الجسيمات في المنطقة الأولى :

$$v_I = \frac{\hbar k_1}{m} \quad (4.68)$$

باعتبار أن m كتلة كل جسيم من الحزمة على فرض أنها من نوع واحد مسمى الدقائق وتجانسة من حيث الكتلة والسرعة والطاقة والشحنة .

بينما يُعرف معامل النفاذية (Transmission Coefficient) T لنفس الحالة الجديدة على الصورة التالية :

$$T = \frac{\text{شدة التيار النافذ خلال الشاشة الجديدة}}{\text{شدة التيار الماقط عليها}} \quad (4.69)$$

$$\therefore T = \frac{|(C \cdot e^{+ik_2 x}) \cdot (C \cdot e^{+ik_2 x})| \cdot v_{II}}{|(A \cdot e^{+ik_1 x}) \cdot (A \cdot e^{+ik_1 x})| \cdot v_I}$$

$$= \frac{|C|^2 \cdot v_{II}}{|A|^2 \cdot v_I} \quad (4.70)$$

حيث v_{II} هي سرعة الجسيمات في المنطقة الثانية :

$$v_{II} = \frac{\hbar k_2}{m} \quad (4.71)$$

وباستخدام المعادلات (4.64) ، (4.65) ، (4.70) ، (4.71) نحصل على :

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} \quad (4.72)$$

$$T = \frac{4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \quad (4.73)$$

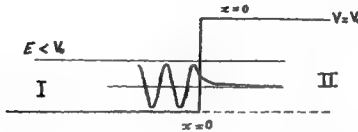
وإذا جمعنا المادتين (4.72) و (4.73) نحصل على :

$$T + R = \frac{(k_1 - k_2)^2 + 4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = 1 \quad (4.74)$$

وهذه النتيجة تتفق تماماً مع قانون بقاء المادة .

الحالة الثانية : E أصغر من V_0

في هذه الحالة وكما هو موضح من الرسم فإن الشروط الحدية تأخذ الصورة التالية :



شكل (٤-٥) حاجز جهدي ارتفاعه أكبر من طاقة حركة الجسيم المتجه ناحيته .

$$V(x) = 0 \quad \text{for } x < 0 \quad (4.75)$$

$$V(x) = V_0 \quad (> E) \quad \text{for } x \geq 0 \quad (4.76)$$

وبلذلك تأخذ معادلة شرودنجر الخاصة بحركة الجسيمات في المنطقة I الشكل التالي :

$$\frac{d^2 \psi_I}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_I = 0 \quad (4.77)$$

وبلذلك يكون الحل في المنطقة الأولى هو :

$$\psi_I = A e^{+ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} \quad (4.78)$$

حيث مرة أخرى A تمثل السعة المرتبطة بالجسيمات المتحركة في المنطقة I تجاه اليمين بينما B تمثل السعة المرتبطة بالجسيمات التي اندمجت عند السعة الجديدة وارتدت مرة أخرى في المنطقة الأولى .

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

أما حركة الجسيمات في المنطقة II فتتطلب بالمثل كل التالي لمعادلة شرودنجر :

$$\frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \psi_{II} = 0$$

وحيث أن V_0 أكبر من E في هذه المعادلة لذا يمكن إعادة كتابتها كما يلي :

$$\frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E) \psi_{II} = 0 \quad (4.79)$$

$$\frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} - k_2^2 \psi_{II} = 0$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)} \quad \text{حيث}$$

$$\therefore \frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} + (i^2) k_2^2 \psi_{II} = 0 \quad (4.80)$$

وعلى ذلك يأخذ الحل في المنطقة II الصورة المعتمدة التالية

$$\psi_{II} = C e^{+i(k_2 x)} + D e^{-i(k_2 x)} \quad (4.81)$$

$$\therefore \psi_{II} = C e^{-k_2 x} + D e^{+k_2 x} \quad (4.82)$$

وحيث أن $(De^{+k_2 x})$ يمثل دالة موجية غير حتمية السلوك فعلينا اعتباره بوضع الثابت D يساوي صفرًا . أما $(Ce^{-k_2 x})$ فيمثل دالة موجية حتمية السلوك ضحلة لوفايتها كلما ازدادت x في المنطقة الثانية . وعلى ذلك فإن حركة الجسيمات في المنطقة الثانية تمثل بالصورة التالية :

$$\psi_{II} = C e^{-k_2 x} \quad (4.83)$$

مرة أخرى كما أوضحنا في الحالة السابقة (B أكبر من v_0) فلان الشروط الحدية لدالة الحالة وانحدارها هي :

$$(\psi_I)_{x=0} = (\psi_{II})_{x=0} \quad (4.84)$$

$$\left(\frac{d\psi_I}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=0} \quad (4.85)$$

$$\therefore A + B = C \quad (4.86)$$

$$ik_1 A - ik_1 B = -ik_2 C \quad (4.87)$$

$$\therefore B = \left(\frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2}\right) A \quad (4.88), \quad C = \left(\frac{2k_1}{k_1 + ik_2}\right) A$$

(4.89)
وهذا يؤدي إلى النتيجة التالية بالنسبة لمعامل الانعكاس R في هذه الحالة :

$$R = \frac{\left| \begin{pmatrix} B e^{+ik_1 x} & (B e^{-ik_1 x}) \end{pmatrix} \right|_{v_1}}{\left| \begin{pmatrix} A e^{-ik_1 x} & (A e^{+ik_1 x}) \end{pmatrix} \right|_{v_1}} = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{k_1 + ik_2}{k_1 - ik_2}\right) \left(\frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2}\right) |A|^2}{|A|^2}$$

$$\therefore R = \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} = 1 \quad (4.90)$$

وبل ذلك يكون معامل النفاذية مساوياً :

$$T = 1 - R = 1 - 1 = 0$$

وهذا معناه ان عدد الدقائق التي تتحرك فعلاً داخل المنطقة الثانية يساوي صفراً مع ان المعالجة الكمية اوضحت اننا لاهم وجود دالة مرجعة في المنطقة الثانية وهي تبعاً للمادة (4.83) تكتب على الصورة :

$$\psi_{II} = C e^{-k_2 x}$$

وهذا بدوره يعني وجود كثافة احتمال للتواجد في المنطقة الثانية عددها $|\psi_{II}|^2$ وهذا التناقض الظاهري يتلاشى ويمكن فهمه عند حساب قيمة $|\psi_{II}|^2$ نجدها متناهية الصغر وتؤول للصفر كما يتضح من العلاقة العددية التالية :

لنفرض ان في حالة حزمة الالكترونات $(V_0 - E)$ يساوي 1 الكترون فولت

$$\therefore k_2 = \frac{2m(V_0 - E)}{h^2} = \frac{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1 \times 1.6 \times 10^{-19}}{(1.05 \times 10^{-34})^2}$$

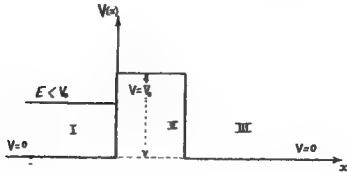
$$= k_2 = 10^{10}$$

فيكون كثافة الاحتمال :

$$\therefore |\psi_{II}|^2 \sim e^{-k_2 x} \simeq 0$$

حركة جسم (أو حزمة من الجسيمات) تجاه هضبة جهدية (تأثير النفق)

The Tunnel Effect



شكل (١-٤) رسم توضيحي للهضبة الجهدية

في الشكل (٤ - ٦) موضح حيز مقسم الى ثلاث مناطق :

المنطقة الاولى I : وفيها تتحرك حزمة من الجسيمات المتجانسة من اليسار اليمين تجاه هضبة جهدية ارتفاعها V_0 بطاقة حركة تساوي الطاقة الكلية E لان قيمة $V(x)$ تساوى صفرا .

المنطقة الثانية II : وهي تمثل الحيز الذي تشغله الهضبة الجهدية وهي تقسم من $x = 0$ الى $x = a$ وتتحرك فيها الجسيمات بطاقة حركة تساوي $(E - V_0)$ اي سالبة لان V_0 اكبر من E .

المنطقة الثالثة III : وهي تمثل الحيز الذي يمتد لجميع قيم x اكبر من a وفيها تتحرك الجسيمات بطاقة حركة تساوي الطاقة الكلية E لان قيمة الجهد V تساوى صفرا . تماما مثل المنطقة الاولى .

اتضح لنا من دراسة السلة الجهدية في حالة طاقة الوضع V_0 اكبر من الطاقة الكلية E ان معامل النفاذية للجسيمات القادمة تجاهها يساوى صفرا . ولكن سيتضح لنا من المعالجة الكمية للحركة لساوى صفرا وهذا معناه ان نسبة معينة من الجسيمات سوف تنفذ الى المنطقة الثالثة وتتحرك فيها وسبب ذلك ان الهضبة الجهدية تتميز بانماص محدود بخلاف حالة السلة الجهدية التي فيها يتقزم الحيز الى منطقتين فقط عند x تساوى صفرا . وكما هو متبع فان معادلة شرودنجر تأخذ الصور التالية لهذه المناطق الثلاث :

في المنطقة I :

$$\frac{d^2 \psi_I}{dx^2} + k^2 \psi_I = 0 \quad (4.91)$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (4.92) \quad \text{حيث}$$

في المنطقة II :

$$\frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} - k_0^2 \psi_{II} = 0 \quad (4.93)$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \quad (4.94) \quad \text{حيث}$$

في المنطقة III :

$$\frac{d^2 \psi_{III}}{dx^2} + k^2 \psi_{III} = 0 \quad (4.95)$$

وحلول تلك المعادلات على التوالي هي :

$$\psi_I = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \quad (4.96)$$

$$\psi_{II} = A_2 e^{+k_0 x} + B_2 e^{-k_0 x} \quad (4.97)$$

$$\psi_{III} = A_3 e^{ikx} \quad (4.98)$$

في المعادلة الأخيرة (4.98) مرة أخرى اكتفينا بالحد $A_3 e^{ikx}$ وهو يمثل الحركة الموجية للجسيمات التي نفدت خلال الهزمة متحركة جهة اليمين ولا يوجد في هذه المنطقة III منابع لجسيمات تتحرك مرتدة نحو الهزمة في الاتجاه العكس. ويوضح ان انحدارات تلك الدوال $\psi_I, \psi_{II}, \psi_{III}$ هي :

$$\psi'_I = ikA_1 e^{ikx} - ikB_1 e^{-ikx} \quad (4.99)$$

$$\psi'_{II} = k_0 A_2 e^{+k_0 x} - k_0 B_2 e^{-k_0 x} \quad (4.100)$$

$$\psi'_{III} = ik A_3 e^{ikx} \quad (4.101)$$

صممنا الان تعريف معامل النفاذية T للهزمة الجديدة بالنسبة للجسيمات القادمة تجاهها كما يلي :

$T = \frac{\text{عدد الجسيمات التي نفذت إلى المنطقة الثالثة}}{\text{عدد الجسيمات القادمة تجاه البنية في المنطقة الأولى}}$

$$= \frac{|\psi_{III}|^2 v_1}{|A_1 e^{ikx}|^2 v_1}$$

$$\therefore T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \quad (4.102)$$

ولن نذكر هنا الآن الاستفادة من الشروط الحدية للحوال $\psi_I, \psi_{II}, \psi_{III}$ وانحداراتها ($\psi'_I, \psi'_{II}, \psi'_{III}$) عند الحدين $x=0$ و $x=a$ لحساب معامل النفاذية T كما يلي :

$$\begin{aligned} (\psi_I)_{x=0} &= (\psi_{II})_{x=0} & (\psi'_I)_{x=0} &= (\psi'_{II})_{x=0} \\ (\psi_{II})_{x=a} &= (\psi_{III})_{x=a} & (\psi'_{II})_{x=a} &= (\psi'_{III})_{x=a} \end{aligned}$$

$$\therefore A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (4.103)$$

$$ikA_1 - ikB_1 = k_0A_2 - k_0B_2 \quad (4.104)$$

$$A_2 e^{k_0a} + B_2 e^{-k_0a} = A_3 e^{ika} \quad (4.105)$$

$$k_0A_2 e^{k_0a} - k_0B_2 e^{-k_0a} = ikA_3 e^{ika} \quad (4.106)$$

بضرب المعادلة (4.103) في ik نحصل على :

$$ikA_1 + ikB_1 = ikA_2 + ikB_2 \quad (4.107)$$

اذن بجمع (4.107) و (4.104) نحصل على :

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_0}{ik}\right) A_2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_0}{ik}\right) B_2 \quad (4.108)$$

والان من معادلة (4.105) + (4.106) نحاول ان نستنتج تعبيراً لكل مـمن
 A_2 ، B_2 بدلالة A_3 ثم نعوض بهما في معادلة (4.108) لنحصل على
 معادلة تربط بين A_1 ، A_3 بدلالة التوابت الخاصة بالمسألة الفيزيائية التي
 ندرسها . سيتم ذلك على النحو التالي :

ي ضرب (4.105) في k_0 نحصل على :

$$k_0 A_2 e^{k_0 a} + k_0 B_2 e^{-k_0 a} = k_0 A_3 e^{ik_0 a} \quad (4.109)$$

مجمع (4.109) + (4.106) نحصل على

$$A_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_0}{k} \right) A_3 e^{ik_0 a - k_0 a} \quad (4.110)$$

نطرح (4.106) من (4.109) نحصل على :

$$B_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_0}{k} \right) A_3 e^{ik_0 a + k_0 a} \quad (4.111)$$

والتمويض من (4.110) + (4.111) في المعادلة (4.108) نحصل على :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{ik_0}{k} \right) \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_0}{k} \right) A_3 e^{ik_0 a - k_0 a} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{ik_0}{k} \right) \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_0}{k} \right) A_3 e^{ik_0 a + k_0 a} \right] \\ &= \frac{1}{4} A_3 e^{ik_0 a} \left[\left(2 + 1 \left(\frac{k_0}{k} - \frac{k_0}{k} \right) \right) e^{-k_0 a} \right. \\ &\quad \left. + \left(2 - 1 \left(\frac{k_0}{k} - \frac{k_0}{k} \right) \right) e^{+k_0 a} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left| \frac{A_1}{A_3} \right|^2 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \frac{k^2}{k_0^2} \left[\left(2 \frac{k_0}{k} + 1 \left(1 - \frac{k_0^2}{k^2} \right) \right) e^{-k_0 a} \right. \\ &\quad \left. + \left(2 \frac{k_0}{k} - 1 \left(1 - \frac{k_0^2}{k^2} \right) \right) e^{+k_0 a} \right] + \\ &\quad \left[\left(2 \frac{k_0}{k} - 1 \left(1 - \frac{k_0^2}{k^2} \right) \right) e^{-k_0 a} \right. \\ &\quad \left. + \left(2 \frac{k_0}{k} + 1 \left(1 - \frac{k_0^2}{k^2} \right) \right) e^{+k_0 a} \right] \quad (4.112) \end{aligned}$$

وهذا هو التعبير العام لمعامل التناذية ، وحيث أنه في معظم الحالات
التي نأخذها التي يحدث فيها هذا التأثير التقي يكون سلك الجدار الجهدى (سلك
الهدية) a كبيراً بالنسبة لطول موجة دي برولى للجسيم في المنطقة II
لذا يمكننا اختزال (4.112) إلى الصورة التالية :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{1}{16} \frac{k^2}{k_0^2} \left[e^{2k_0 a} \left(4 \left(\frac{k_0}{k} \right)^2 + \left(1 - \frac{k_0^2}{k^2} \right)^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{16} \frac{k^2}{k_0^2} \left[4 \left(\frac{k_0}{k} \right)^2 + 1 + \frac{k_0^4}{k^4} - 2 \frac{k_0^2}{k^2} \right] e^{2k_0 a} \\ &= \frac{1}{16} \frac{k^2}{k_0^2} \left(1 + \frac{k_0^2}{k^2} \right)^2 e^{2k_0 a} \end{aligned}$$

$$\therefore T = 16 \frac{k_0^2}{k^2} e^{-2k_0 a} \left(1 + \frac{k_0^2}{k^2} \right)^{-2}$$

والنتيجة عن كل من k ، k_0 ، E ، V_0 نحصل على :

$$\begin{aligned}
 T &= 16 \frac{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}{\frac{2mE}{\hbar^2}} \left[1 + \frac{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}{\frac{2mE}{\hbar^2}} \right]^{-2} e^{-2k_0 a} \\
 &= 16 \cdot \frac{V_0 - E}{E} \left[1 + \frac{V_0 - E}{E} \right]^{-2} e^{-2k_0 a} \\
 &= 16 \cdot \frac{V_0 - E}{E} \left[\frac{E + V_0 - E}{E} \right]^{-2} e^{-2k_0 a} \\
 &= 16 \cdot \frac{V_0 - E}{E} \left[\frac{E^2}{V_0^2} \right] e^{-2k_0 a} \\
 \therefore T &= 16 \left(1 - \frac{E}{V_0} \right) \frac{E}{V_0} e^{-2k_0 a} \quad (4.113)
 \end{aligned}$$

$$\therefore T = 16 \left(1 - \frac{E}{V_0} \right) \frac{E}{V_0} e^{-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}} \quad (4.114)$$

شال (١ - ٤) :

احسب محتويات الطاقة الثلاث الاولى لحركة الكتون داخل ذرته الأم طيسى
فرض ان تلك الحركة تاتل تغيرها حركة جسيم داخل صندوق مطلق وفرض ان قطر
الذرة يعاوى $2,5$ أنجستروم . ثم احسب الطول الموجى للاعراج الكهرومغناطيسى
الذى ينمى نتيجة انتقال مثل هذا الالكترون من المستوى الثالث الى المستوى الاول .

كرحل المسألة بالنسبة لحركة نيوكليون داخل نواة الذرة وفرض ان قطر النواة
يعاوى $2,5$ فيرى .

الحل :

علنا ان مستوى الطاقة E_n المقابل لعدد الكم n لحركة جسم داخل صندوق تعطى بالملاحة :

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8 m a^2} \cdot n^2 \quad (1)$$

إذا بالنسبة لحركة الكترون داخل ذرته يكون :

$$E_n = \frac{(3.14)^2 \cdot (1.05 \times 10^{-34} \text{ J.s})^2}{8 \cdot (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (2.5 \times 10^{-10} \text{ m})^2} \cdot n^2 \quad (2)$$

$$\therefore E_n = \frac{10.87 \times 10^{-68}}{4.55 \times 10^{-49}} \cdot n^2 = (2.39 \times 10^{-19}) \cdot n^2 \text{ J}$$

$$= 1.49 n^2 \text{ eV}$$

$$\therefore E_1 = 1.49 \text{ eV}$$

$$, E_2 = 1.49 \times 4 = 5.96 \text{ eV}$$

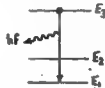
$$, E_3 = 1.49 \times 9 = 13.41 \text{ eV}$$

$$\therefore E_3 - E_1 = 13.41 - 1.49 = 11.92 \text{ eV} = hf = hc/\lambda$$

إذا الطول الموجي للأشعاع الكهرومغناطيسى المنبعث نتيجة انتقال الالكترون من المستوى الثالث الى المستوى الاول λ حيث :

$$\lambda_{\text{atomic}} = \frac{hc}{11.92 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 1.04 \times 10^{-7} \text{ m} = 1040 \text{ \AA}$$

وبالمثل بالنسبة لحركة النيوترون داخل النواة فان :



$$E_n = \frac{(3.14)^2 \cdot (1.05 \times 10^{-34})^2 \cdot n^2}{8 (1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}) (2.5 \times 10^{-15} \text{ m})} = (1.3 \times 10^{-12}) \cdot n^2$$

$$= 8.13 \text{ eV} \quad \text{Mev}$$

$$\therefore E_1 = 8.13 \text{ Mev}$$

$$E_2 = 32.52 \text{ Mev}$$

$$E_3 = 73.17 \text{ Mev}$$

$$\therefore E_3 - E_1 = 65.04 \text{ Mev} = 1.041 \times 10^{-11} \text{ J}$$

$$\therefore \lambda_{\text{nuclear}} = 1.8 \times 10^{-14} \text{ m} = 8 \text{ Fermis}$$

ومن هذا المثال التوضيحي نجد أن قيم مستويات الطاقة لحركة النيوكليونات داخل النواة حوالي مليون مرة شتلتها لحركة الإلكترونات داخل الذرة الأم وهذا يفسر سبب أن الطاقة النووية أكبر بملايين المرات الطاقة الكيميائية .

تمارين (٤ - ٧) :

جسيم ألفا حر الحركة في اتجاه مفرد داخل صندوق جهد أوجد :

أ - القيم الذاتية للطاقة للمستويات الثلاث الأولى إذا كان اتساع الصندوق $a = 2 \text{ سم}$. نتائج النتيجة .

ب - القيم الذاتية للطاقة للمستويات الثلاث الأولى إذا كان اتساع الصندوق $a = 1.5 \text{ نيمى}$. نتائج النتيجة أيضا .

ثم أوجد بالنسبة للحالة الثانية (ب) ما يأتي : احتمال تواجد جسيم ألفا ذى المستوى الأدنى للطاقة عند الموضع x حيث x تقع في المدى

$$\frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3}$$

الحل :

أ - عندما يكون اتساع الصندوق ٢ سم

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8 m a^2} = \frac{(3.14)^2 \cdot (1.05 \times 10^{-34})^2 \cdot n^2}{8 \cdot (6.68 \times 10^{-27}) \cdot (0.02)^2}$$

$$= (0.51 \times 10^{-38}) n^2 \text{ J} = (0.32 \times 10^{-19}) n^2 \text{ eV}$$

وبما ان قيم مستويات الطاقة صغيرة جدا وبالتالي الفرق بينها تكاد تكون معدومة • مكونة شريطا متصلا من الطاقة •

ب - عندما يكون اتساع صندوق الجهد ١,٦ سمى فان :

$$E_n = \frac{(3.14)^2 \cdot (1.05 \times 10^{-34})^2 \cdot n^2}{8 \cdot (6.68 \times 10^{-27}) \cdot (6.1 \times 10^{-15})^2}$$

$$= (0.55 \times 10^{-13}) n^2 \text{ J} = 0.34 n^2 \text{ MeV}$$

$$E_1 = 0.34 \text{ MeV}$$

$$E_2 = 1.36 \text{ MeV}$$

$$E_3 = 3.06 \text{ MeV}$$

ويتضح من هذه النتيجة في هذه الحالة ان مستويات الطاقة لها قيم داخلية
مدى طاقات الجسيمات النووية • كما يتضح ان الفرق بينها يمكن تمييزها عن بعضها •

وبالنسبة لاحتمال تواجد جسيم الفا في المدى $a/3$ • $a/3$:

$$P = \int_{a/3}^{2a/3} \psi_n^* \psi_n dx$$

حيث

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x$$

$$\therefore \psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}$$

إذا احتمال التواجد هو :

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{a} \int_{a/3}^{2a/3} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx \\ &= \frac{2}{a} \int_{a/3}^{2a/3} \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{2\pi x}{a}) dx \\ &= \frac{1}{a} \left\{ (x) - \frac{a}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{a} \right\}_{a/3}^{2a/3} = 0.609 \end{aligned}$$

مثال (٤ - ٣) :

حزمة الكثرونية طاق حركتها ٢٠ إلكترون فولت متجهة ناحية ملتة جهد V مرتفعة ١٢ إلكترون فولت . احسب كلاً من معامل الانعكاسية R ومعامل النفاذية T .

الحل :

رأيتنا ان :

$$k = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}^2, \quad T = \frac{4 k_1^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

- ١٠٦ -

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{2mE}{\hbar^2} && \text{حيث} \\
 &= \frac{2 \cdot (9.1 \times 10^{-31}) \cdot (20 \times 1.6 \times 10^{-19})}{(1.05 \times 10^{-34})^2} \text{ m}^{-1} = 2.298 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} \\
 k_2 &= \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}} = 1.454 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} \\
 \therefore R &= \frac{(2.298 - 1.454)}{2.298 + 1.454} = 0.051 \\
 T &= \frac{4 \times 2.298 \times 1.454}{(3.752)^2} = 0.949
 \end{aligned}$$

شال (٤ - ١) :

إذا كانت دالة الجهد $V(x)$ تساوي صفراً للقيم أقل من 0 بينما
تساوي V_0 للقيم x أكبر من 0 . اثبت ان $\psi(x)$ تحول للصفر عندما
 V_0 تحول الى ما لا نهاية .

الحل :

بما ان $V(x)$ تساوي صفراً في حالة $x < 0$ ، تساوي V_0 في حالة
 $x > 0$ فان معادلة شرودنجر تأخذ صورتين التاليتين :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi &= 0 && x < 0 \quad \text{عندما تكون} \\
 \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E) \psi &= 0 && x > 0 \quad \text{وعندما تكون}
 \end{aligned}$$

وطى نرى ان $0 < E < V_0$ فان حلاها هي :

$$\psi = A \cos kx + B \sin kx \quad x < 0 \quad \text{عندما تكون}$$

$$\psi = C e^{-Kx} \quad x > 0 \quad \text{عندما تكون}$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{حيث}$$

$$K^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)$$

وبالاستفادة من خاصية الاستمرارية للدالة ψ وشقتها الاولى عند $x = 0$ نجد ان :

$$A = C$$

$$kB = -KC$$

فاذا قيَّت V_0 من ∞ تقرب K بالتالى من ∞ وعليه فان C يجب ان تقرب من الصفر لضمان ان يكون الحل الخارجى بالنطقة $x < 0$ محدد ومعنى ذلك :

$$x \geq 0 \quad \text{عند}$$

$$\psi = C e^{-Kx} = 0$$

اي تتلاشى الدالة ψ في هذا المدى .

شال (٤ - ٥) :

اثبت ان الجليين العامين

$$u(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad (a)$$

$$u(x) = C e^{-ikx} + D e^{-ikx} \quad (b)$$

لا يتحققان شرط المعايير لدوال الطاقة .

الحل :

نبدأ بشرط المعايير فان :

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^*(x) u(x) dx = 1$$

ولكن بالنسبة للحل (a) نجد ان :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (A \cos kx + B \sin kx)^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (A^2 \cos^2 kx + B^2 \sin^2 kx + 2 AB \sin kx \cdot \cos kx) dx \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (1 + \cos 2 kx) + B^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (1 - \cos 2 kx) dx \\ & \quad + \frac{2 AB}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \sin kx d(\sin kx) \\ &= A^2 \int_0^{\infty} (1 + \cos 2 kx) dx + B^2 \int_0^{\infty} (1 - \cos 2 kx) dx \\ & \quad + \frac{2 AB}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \sin kx d(\sin kx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 A^2 \left[x + \frac{1}{2k} (\sin 2 kx) \right]_0^{\infty} \\
 &+ B^2 \left[x - \frac{1}{2k} (\sin 2 kx) \right]_0^{\infty} \\
 &+ \frac{2 AB}{k} \left[\frac{1}{2} \sin^2 kx \right]_{-\infty}^{\infty} = \infty
 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} u^*(x) \cdot u(x) dx \neq 1$$

أي أن هذا الحل لا يحقق شروط المعايير
وبالتالي بالنسبة للحل الآخر نجد أن :

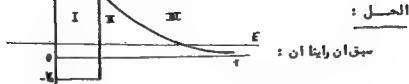
$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{\infty} (C e^{+ikx} + D e^{-ikx}) (C e^{+ikx} + D e^{-ikx}) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (C^2 + D^2 + 2 CD) dx = \infty \neq 1
 \end{aligned}$$

∴ هذا الحل أيضا لا يحقق شروط المعايير .

وهذا المثال يوضح لنا أن شروط المعايير للدالة الموجية مرتبط ارتباطا وثيقا
بالشروط المحددة الخاصة بالمجموعة الفيزيائية التي تمثلها تلك الدالة .

شال (٤ - ٦) :

استنتج التعبير الخاص بمعامل التناذية للهضبة الموضحة بالشكل ثم طبق النتيجة
التي تحمل عليها لشرح انطلاق جميعات ألفا من أنوية العناصر المشعة ثم احسب
كذلك (بالتقريب) متوسط العمر لعنصر مشع $^{216}_{82}\text{X}$ تبين أنه جميعات ألفا ذات
طاقة حرة تساوي ٨.٥ مليون إلكترون فولت لكل منها .



$$|T|^2 = \left(\frac{2 \frac{hK}{2} + K}{K^2 + K} \right)^2 e^{-4Kx} = T$$

معامل النفاذية

$$\therefore T = 16 \cdot \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0} \right) e^{-2 \frac{R}{h} \sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

وبما ان معدل التآكل الاشعاعي كل ثانية يتناسب مع عدد الانوية المشعة الموجودة
تبعاً للتآكل :

$$\frac{dN}{dt} = - \lambda N$$

فان ثابت التآكل λ يمثل احتمال اى من الانوية الموجودة للتآكل خلال وحدة الزمن . وهذا بالتالى معناه ان يفرض ان جسيم الفا قبل انطلاقه من النواة الام كان موجودا طوال الوقت داخلها ومتحركا داخل حيزها بحركة v فانه يصطدم بجدارها الداخلى عددا من المرات كل ثانية مساويا $(v/2R)$ حيث $2R$ قطر النواة . وحيث ان نوى كل مرة هناك احتمال لنفاذه مساويا T اذا احتمال انطلاق الجسيم الفا نوى الثانية الواحدة (اى احتمال اى من الانوية الموجودة للتآكل λ) هو :

$$\lambda = \frac{v}{2R} T$$

اذا متوسط عمر النوى لجسيمات الفا هو :

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda} = \frac{2R}{v} \cdot \frac{1}{T}$$

وفى هذه المسألة لدينا :

$$- 1 - \gamma -$$

$$2 R = 2 (r_0 A^{1/3}) = 2 (1.25 \times 10^{-15} \text{ m}) (216)^{1/3}$$

$$= 1.5 \times 10^{-14} \text{ m}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 5.8 \times 1.6 \times 10^{-13}}{6.58 \times 10^{-27}}} = 1.67 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

$$T = 16 \cdot \frac{E}{V_0} \cdot (1 - \frac{E}{V_0})^{-2} \frac{R}{h} \sqrt{2m(V_0 - E)}$$

ج

$$E = 5.8 \text{ Mev} = 5.8 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(2e)(Ze)}{R}$$

$$= 9 \times 10^9 \frac{(2 \times 1.6 \times 10^{-19}) \cdot (82 \times 1.6 \times 10^{-19})}{0.75 \times 10^{-14}}$$

$$= 5.038 \times 10^{-12} \text{ J} = 31.5 \text{ Mev}$$

$$\therefore t = 10^{-19} \text{ sec}$$

شال (٢ - ٧) :

وضع انه في أى مسألة في ميكانيكا الكم تتصف بحركة جسيم في بعد واحد فبان طيف مستويات الطاقة للحالات الكمية المرتبطة (الغير حرة) يتميز بعدم الانتفاء .

الحل :

لتفرض ان العكس هو الواقع الحقيقي فمعنى ذلك انه اذا كانت $\psi_1(x)$ ،
 $\psi_2(x)$ دالتين موجيتين مستقلتين استقلالاً خطياً وتتميان لنفس مستوى الطاقة
 ذات القيمة الذاتية E . ومعنى ذلك :

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi_1 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi_2 = 0$$

تبدلان الى :

$$\frac{\psi_1'''}{\psi_1} = \frac{\psi_2'''}{\psi_2} = \frac{2m}{\hbar^2} (V - E)$$

أى ان :

$$\psi_1''' \psi_2 - \psi_2''' \psi_1 = (\psi_1' \psi_2')' - (\psi_2' \psi_1')' = 0$$

وباجراء التكامل :

$$\psi_1' \psi_2 - \psi_2' \psi_1 = \text{a constant}$$

وحيث انه عند $x \rightarrow \infty$ تتلاشى كل من ψ_1 ، ψ_2 (حالات مرتبطة)
 فهذا معناه ان الثابت في المعادلة الاخيرة يجب ان يساويه بالصفر

$$\therefore \frac{\psi_1'}{\psi_1} = \frac{\psi_2'}{\psi_2}$$

وبإجراء التكامل مرة أخرى

$$\therefore \psi_1 = C \cdot \psi_2$$

وهذا يتعارض مع الفرض الذي بدأنا به وهو عدم اعتماد ψ_1 ، ψ_2 على بعضهما
اعتمادا خطيا . وعلى ذلك فإن ψ_1 ، ψ_2 يجب أن تتميز بعدم الابتساق .

مثال (٤ - ٨) :

عزّين مستويات الطاقة الذاتية وكذلك الدوال الايهينسية القابلة لجسيم يتحرك
داخل مكعب طول ضلعه L يتصف بجهده متغير بالمروط الحدية التالية :

$$V(x, y, z) = 0 \quad , \quad 0 < x < L ; \quad 0 < y < L ; \quad 0 < z < L , \\ = \infty \quad \text{خارج الصندوق}$$

الحل :

معادلة شرودنجر داخل المكعب حيث الجهد V يساوى صفرا هي :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x, y, z) = 0$$

وباستخدام طريقة فصل المتغيرات مع وضع الدالة ψ في الصورة :

$$\psi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

نحصل على المعادلة :

$$\left[\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} \right] + \left[\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} \right] + \left[\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} \right] = - \frac{2mE}{\hbar^2}$$

ونلاحظ في الطرف الايسر منها ان الحد الاول هو دالة المتغير x فقط ، الثانى دالة للمتغير y فقط والثالث دالة للمتغير z فقط بينما الطرف الايمن منها مستقل عن المتغيرات الثلاث x, y, z . وعلى ذلك فان كل حد داخل قوسين مربعين يجب ان يعاوى ثابت على حدة ولكن كما يلى :

$$\frac{1}{x} \frac{d^2 x}{dx^2} = -k_x^2 \quad , \quad \therefore X(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_x \pi}{L} x$$

$$\frac{1}{y} \frac{d^2 y}{dy^2} = -k_y^2 \quad , \quad \therefore Y(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_y \pi}{L} y$$

$$\frac{1}{z} \frac{d^2 z}{dz^2} = -k_z^2 \quad , \quad \therefore Z(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_z \pi}{L} z$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{L} \frac{R}{2} &= k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 && \text{كما هو :} \\ &= \left(\frac{n_x \pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{L} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore R = \frac{\pi^2 \pi^2}{2 L^2} \left[n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \right]$$

$$= X(x) Y(y) Z(z)$$

$$= \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin \frac{n_x \pi}{L} \sin \frac{n_y \pi}{L} \sin \frac{n_z \pi}{L}$$

مثال (٤ - ١) :

جسيم يتحرك داخل صندوق طول ضلعه L ويصل بدالة موجيه :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{ik \cdot r}$$

بشروط حديه :

$$\psi(x=0, y, z) = \psi(x=L, y, z)$$

$$\psi(x, y=0, z) = \psi(x, y=L, z)$$

$$\psi(x, y, z=0) = \psi(x, y, z=L)$$

استنتج علاقة تسمى عدد الحالات المبرجه للجسيم في وحدة الحجم داخل هذا الصندوق *

الحل :

$$\psi = \psi(x, y, z) \quad \text{حيث ان :}$$

اذًا باننا نعالج السلوب نصل الختيرات لحل معادلة هيرودنجر :

$$\nabla^2 \psi(x, y, z) + \frac{2\pi m E}{h^2} \psi(x, y, z) = 0$$

نستخرج ان :

$$\psi = \frac{1}{L^3} \sin \frac{2\pi n_x}{L} x \sin \frac{2\pi n_y}{L} y \sin \frac{2\pi n_z}{L} z$$

$$= \frac{1}{L^3} \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z$$

حيث تأخذ الأعداد n قيما صحيحة موجبة أو سالبة .
 وحيث أن عدد الحالات الموجبة التي تقع المركبة العنمية للمدد الموجي k يسـمـن
 $(k_x + dk_x)$ ، يكون مساويا للأعداد n_x التي تقع بـسـمـن
 $(\frac{1}{2\pi}) dk_x$ أى مساويا تقريبا للمدد $(\frac{1}{2\pi}) (k_x + dk_x)$ ، $(\frac{1}{2\pi}) k_x$
 إذا عدد الحالات الموجبة التي تقع في المدى $dk_x dk_y dk_z$ للمدد
 الموجي k هو

$$(\frac{1}{2\pi})^3 dk_x dk_y dk_z$$

وإذا رمزنا بالرمز $g(k, \Omega) dk d\Omega$ لعدد الحالات التي يقع المـمـد
 الموجي k بين k و $k + dk$ خلال الزاوية المجمة $d\Omega$ فإن:

$$g(k, \Omega) dk d\Omega = (\frac{1}{2\pi})^3 k^2 dk d\Omega$$

$$= \frac{V}{8\pi^3} k^2 dk \sin \theta d\theta d\phi$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} ; dE = \frac{\hbar^2 k}{m} dk \quad \text{بحال ان :}$$

$$\therefore g(E, \Omega) dE d\Omega = \frac{V}{16\pi^3 \hbar^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} dE d\Omega$$

$$\rho(E) = g(E, \Omega) d\Omega \quad \text{وإذا فرضنا}$$

$$\therefore \rho(E) = \frac{V}{16\pi^3 \hbar^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} d\Omega$$

$$= \frac{m V}{8\pi^3 \hbar^2} k d\Omega$$

بينما العدد الكلي للحالات بين الطاقة E و الطاقة $E + dE$ يمكننا الحصول عليه باجراء التكامل على الزاوية المماسية :

$$g(E) dE = \frac{V}{16 \pi^3 h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} dE \cdot 4\pi$$

$$\therefore g(E) dE = \frac{V}{4 \pi^2 h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} dE$$

ملحوظة : نفس هذه النتيجة تحصل عليها عند حساب كثافة عدد حالات الكم $g(E) dE$ لجسيم يتحرك داخل صندوق يتميز بأن الجهد عند جدرانه يقرب من صفر بالنهاية بمعنى ان دالة الحالة تختفي عند الجدران مع ملاحظة ان القيم k_x و k_y و k_z المسموح بها في هذه الحالة هي :

$$k_x = \frac{\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{\pi n_z}{L}$$

حيث الاعداد n_x و n_y و n_z تأخذ نقطتياً صحيحة موجبة .

مثال (٤ - ١٠) :

من المثال السابق وعلى اخبار ان الالكترونات في المعادن تتحرك بحرية فسي ثلاث ابعاد داخل صندوق وعلى فرض ان احتمال ايجاد الكترون بطاقة E يمتطس بالملاقة :

$$P(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/kT}}$$

استنتج علاقة لحساب E_F عندما تكون قيمة E_F اكبر بكثير من kT

الحل :

من المثال السابق وجدنا ان :

$$g(E) = \frac{2 \pi V}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{2} m E \right)^{1/2}$$

وطيه فان عدد الالكترونات n في وحدة الحجم من المعدن هي :

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{V} \int_0^{\infty} g(E) \cdot P(E) \cdot dE \\ &= \frac{(2 \pi)^{3/2}}{2 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} E^{1/2} \frac{1}{1 + e^{(E - E_F)/kT}} dE \end{aligned}$$

وعند $0 = T$ فان توزيع فيرمي $P(E)$ يكون عبارة عن توزيع دريوي الى :

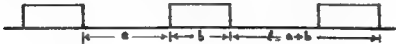
$$n = \frac{(2 \pi)^{3/2}}{2 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{E_{F0}} E^{1/2} dE = \frac{(2 \pi)^{3/2}}{2 \pi^2 \hbar^3} \left(\frac{2}{3} E_{F0}^{3/2} \right)$$

$$\therefore E_{F0} = \frac{\hbar^2}{2m} (3 \pi^2 n)^{2/3} \quad (\sim 5 \text{ eV for Ga and Ag})$$

شال (٤ - ١١) :

في نظرية التبريد band theory of metal للحواد الصلبة

يقابل الفرد كثيرا جهد دوري يتميز بالحدود الحدية التالية :



$$V(x) = 0 \quad \text{تأ } (n-1)l + \frac{b}{2} < x < nl - \frac{b}{2}$$

$$V(x) = V_0 \quad \text{تأ } nl - \frac{b}{2} < x < nl + \frac{b}{2}$$

حيث $b = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ هو انماط الحواجز الجهدية l انماط
الفصل بينها $l = a + b$

ويمكن وضع حل معادلة شرودنجر باعتبار الفصل a كما يلي :

$$\psi(x) = A_n e^{ik(x-nl)} + B_n e^{-ik(x-nl)}$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{حيث}$$

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$$

احسب عناصر المصفوفة ووضح انها لا تعتمد على العدد n ثم وضح
ان الحلول المقبولة يمكن الحصول عليها فقط عندما يكون

$$|\text{trace } Q| \leq 2$$

ثم استخدم هذه النتيجة ليجاد علاقة يمكن فيها الحصول على مدى قيم الطاقة المسموح
بها والخير مسموح بها .

الحل :

باستخدام شروط الاستمرارية لدوال الحالة نحصل على :

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$$

حيث

$$Q_{11} = Q_{22}^* = e^{ik(l-b)} \left[\cosh Kb - \frac{1-\epsilon}{2} \sinh Kb \right]$$

$$Q_{12} = Q_{21}^* = -\frac{1-\epsilon}{2} (\sinh Kb) e^{ikl}$$

$$k^2 = \frac{2\epsilon E}{\hbar^2} ; \quad K^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \quad \text{وكما رأينا فهنا :}$$

$$\epsilon = \frac{K}{k} - \frac{k}{K} ; \quad \eta = \frac{K}{k} + \frac{k}{K} \quad \text{هنا}$$

وبما ان عناصر المصفوفة Q البوصلة لاتعتمد على العدد n اذا يمكننا وضع :

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

والقيم الاجينية للمصفوفة هي جذور المادة السيرة :

$$q^2 - q \text{ trace } Q + \det Q = 0$$

وبما ان $\det Q = 1$ فان الجذور تعطى كما يلي :

$$q \pm = \frac{1}{2} \left[\text{trace } Q \pm \sqrt{(\text{trace } Q)^2 - 4} \right]$$

واذا كانت الجذور مختلفة فان نوع التجهيزات الاجينية يكونان مستقلين خطيا ويمكن وضع

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^+ \\ B_0^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_0^- \\ B_0^- \end{pmatrix}$$

حيث $(\begin{smallmatrix} A_0^- \\ B_0^- \end{smallmatrix})$ و $(\begin{smallmatrix} A_0^+ \\ B_0^+ \end{smallmatrix})$ هما المتجهات الايجينية المكافئة للقيم الايجينية q_+ و q_- على التوالي . وعلى ذلك :

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = q_+^n \begin{pmatrix} A_0^+ \\ B_0^+ \end{pmatrix} + q_-^n \begin{pmatrix} A_0^- \\ B_0^- \end{pmatrix}$$

فانما كان $| \text{trace } Q | > 2$ فان $q_+ \neq q_-$ تكونان حقيقتان
وأيما من $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_+^n| \rightarrow \infty$ او نهاية $|q_-^n| \rightarrow 0$ ومثل هذه

الحلول تتعارض مع شرط حسن سلوك دالة الطاقة . ولا يمكن $n \rightarrow \infty$ تحقيق
ذلك الا اذا كان : $| \text{trace } Q | \leq 2$

وبحيث ان $\text{trace } Q$ كمية حقيقية فيمكننا تعريف بمقابل Q بحيث

$$\cos \beta = \frac{1}{2} \text{trace } Q$$

$$(q_- = e^{-i\beta} , q_+ = e^{+i\beta} \text{ وكذا })$$

$$\cos \beta = \cosh Kb \cos ka + \frac{\epsilon}{2} \sinh Kb \sin ka$$

ومن هذه المعادلة يمكننا الحصول على التركيب الفيزيائي للتركيب البللوري في بعضه
واحد مثلاً : في حالة $E > V_0$ يلاحظ ان جميع قيم الطاقة التي تأخذ شكل
 $ka = n\pi$ (حيث n عدد صحيح) غير ممكن بها تميزاً ثانياً او عند حوانات
الدوال المثلثية بها . ومن ناحية استمرارية دوال الطاقة تستلزم ان وجود مدى
طاقة اذا قيم غير ممكن بها بجانب القيم المحددة المسموح بها تبعاً للمعادلة
المعادلة .

أما في حالة $E < V_0$ فان شرط القيمة الايجينية يصبح :

$$\cos \beta = \cos k_1 b \cos ka - \frac{k^2 + k_1^2}{2 k k_1} \sin k_2 b \sin ka$$

$$k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \quad \text{حيث}$$

ونفسر لاجلنا يمكننا تحديد مناطق الطاقة المسموح بها والغير مسموح بها .

شمال (١٧-٤) :



للجهد الموضح بالرسم الذي يتميز بالاتي :

$$V(x) = V_0 \quad \text{اذا كانت} \quad 0 < x < a+b$$

$$V(x) = 0 \quad \text{اذا كانت} \quad a+b < x < (2a+b) \quad 0 < x < a$$

$$V(x) = \infty \quad \text{اذا كانت} \quad a = x = (2a+b)$$

اوجد مستوي الطاقة لجسيم يتحرك داخل هذا الجهد بحيث ان طاقته

اقل من V_0

الحل :

حل معادلة شرودنجر الذي يحقق الشروط الحدية بخصوص اختفاء الدالة

عند $x = 0$ * $x = (2a+b)$ عبارة عن ؟

$$\psi(x) = \begin{cases} A \sin kx, & 0 < x < a \text{ إذا كانت} \\ B \exp(Kx) + C \exp(-Kx), & a < x < (a+b) \text{ إذا كانت} \\ D \sinh(2a+b-x), & a+b < x < 2a+b \text{ إذا كانت} \end{cases}$$

حيث

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad K = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

وخاصية الاستمرارية لكل من ψ و $\frac{d\psi}{dx}$ الأولى عند الحدود $x = a$ و $x = a+b$ تعطيان الأربع معادلات التالية بعد التخلص من C و B :

$$\left(\frac{K}{k} \tan ka + 1\right) e^{Kb} \cdot A = \left(\frac{K}{k} \tan ka - 1\right) D$$

$$\left(\frac{K}{k} \tan ka - 1\right) e^{-Kb} \cdot A = \left(\frac{K}{k} \tan ka + 1\right) D$$

والحصول على حلول ذات أهمية يجب أن يكون لدينا المعادلة التالية :

$$\left(\frac{K}{k} \tan ka + 1\right) e^{Kb} = \pm \left(\frac{K}{k} \tan ka - 1\right)$$

وهذه المعادلة تعطي مستقيمات الطاقة الخاصة بالمسألة . فإذا فرضنا $Kb \gg 1$ نجد أن :

$$\tan ka \approx -\frac{k}{K} \mp 2 \frac{k}{K} e^{-Kb}$$

وحيث أن الطرف الأيمن لهذه المعادلة عبارة عن كمية صغيرة لأن $K \gg k$ نحصل على التقريب ذي الرتبة الصغرى :

$$\tan k_0 a = 0$$

$$k_0 a = n\pi$$

أو

$$\therefore K_n^{(0)} = \frac{w^2 k^2 a^2}{2 \pi a^2}$$

علاقة ذلك

$$k \approx \frac{n\pi}{a} - \frac{n\pi/a}{K_0 a} + \frac{n\pi/a}{K_0 a} e^{-k_0 b}$$

$$K_n \approx K_n^{(0)} - \frac{2 K_n^{(0)}}{K_0 a} + 4 \frac{K_n^{(0)}}{a K_0} e^{-k_0 b}$$

أو

$$K_0 = \sqrt{\frac{2 \pi (V_0 - K_n^{(0)})}{a^2}}$$

حيث

ومعنى ذلك ان مستويات الطاقة يحدث لها انقلاق .

الباب الخامس

المعالجة الكمية للمتذبذب التوافقي البسيط

**QUANTUM MECHANICAL TRATMENT OF THE SIMPLE
HARMONIC OSCILLATOR**

الباب الخامس

المعالجة الكمية للمتذبذب التوافقي البسيط

QUANTUM MECHANICAL TRATMENT OF THE SIMPLE HARMONIC OSCILLATOR

—



من المعلوم ان اى حركة توافقية بسيطة تتميز بمعجلة \ddot{x} تتناسب طرديا مع الازاحة x عن مركز الاتزان وتكون دائما متجهة ناحية هذا المركز • اى انها عكس اتجاه الازاحة • وعلى ذلك فان القوة F المؤثرة على مثل هذا الجسم الذى يتحرك حركة توافقية بسيطة تعطى بالمعادلة التالية :

$$F = -kx \quad (5.1)$$

اى ان

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot x \quad (5.2)$$

حيث كما تعلم من الميكانيكا الكلاسيكية :

- m هى كتلة الجسم اى كتلة التذبذب التوافقي البسيط •
- k ثابت القوة •
- ω الموعة الزاوية للتذبذب التوافقي •
- T الزمن الدورى له •

وبمثل هذه الحركة تتألفنا كثيراً في مجالات متعددة بل :

- ١ - حركة الذرات والجزيئات داخل بلورة الحالة الجامدة .
- ٢ - حركة الذرات داخل الجزيئات المركبة في الموائع .
- ٣ - حركة الإلكترونات في الذرات .
- ٤ - حركة البروتونات والنيوترونات داخل الأنوية الذرية .
- ٥ - حركة الفوتونات في المجال الأعمى .

والآن لو تذكرنا أن طاقة الوضع V مرتبطة بالقوة F بالمعادلة :

$$F = -\text{grad } V$$

اذن للتذبذب التوافقي البسيط :

$$F = -\frac{dV}{dx} = -kx \quad (5.3)$$

$$\therefore V(x) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

وعلى ذلك فان المعادلة الهاميلتونية لمثل هذا التذبذب التوافقي البسيط تأخذ الصورة التالية :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad (5.4)$$

اذنا معادلة شرودنجر تصبح في الصورة البسيطة التالية :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\therefore \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} x^2 \psi(x) = 0 \quad (5.5)$$

ولكن وحدة الكمية $\frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2}$ هي متر² . أى أن وحدة الكمية $\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ هي $\frac{1}{\text{متر}}$ (أى أن أبعادها $\frac{1}{\text{الطول}}$).

وعلى ذلك فان حاصل الضرب $\frac{E}{\hbar}$ يمثل كمية متغيرة ليس لها أبعاد . ولتبريز لها بالرمز ξ أى أن :

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot x \quad (5.6)$$

والتعبير عن معادلة شرودنجر بدلالة هذا التغير الجديد ξ الذى ليس له
إبعاد • ومع ملاحظة أن :

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} \quad (5.7)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{m\omega}{\hbar} \frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} \quad (5.8)$$

فإننا نحصل على :

$$\frac{m\omega}{\hbar} \frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(\xi) - \frac{m\omega}{\hbar} \xi^2 \psi(\xi) = 0$$

$$\therefore \frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \frac{2E}{\hbar\omega} \psi(\xi) - \xi^2 \psi(\xi) = 0$$

$$\therefore \frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2) \psi(\xi) = 0 \quad (5.9)$$

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} \quad (5.10) \quad \text{حيث}$$

والتيم الذاتية إذا للطاقة مرتبطة بالتيم الذاتية للمعامل λ • وحيث أن ($E \geq 0$)
إذا ($\lambda \geq 0$) •

ولكى يسهل علينا الحصول على حل المعادلة (5.9) علينا أن نختار الدالة
 $\psi(\xi)$ عندما تقرب قيمة التغير المستقل ξ الى ما لانهاية وفى هذه فان قيمة
 $(\lambda - \xi^2)$ توكل الى $(-\xi^2)$ أى ان معادلة شرودنجر للدالة $\psi(\xi)$
تختزل الى الصورة التالية :

$$\frac{d^2\psi_{\infty}}{d\xi^2} - \xi^2 \psi_{\infty} = 0 \quad (5.11)$$

ولاحصول على الحل الخطري بها نعتبر بالشخير η عن ξ^2 أي أن :

$$\eta = \xi^2 \quad (5.12)$$

$$\therefore \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = 2 \frac{d\psi}{d\eta} + 4 \xi^2 \frac{d^2\psi}{d\eta^2} \quad (5.13)$$

وبلى ذلك تصبح (5.11) عندما تقرب ξ من $\pm \infty$:

$$\frac{d^2\psi_{\infty}}{d\eta^2} - \frac{1}{4}\psi_{\infty} = 0$$

ومن خبرتنا في الباب الرابع (راجع معادلة 4.10) يتضح لنا أن :

$$\psi_{\infty} = A e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}\eta} = A e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}\xi^2}$$

وحيث أن ψ_{∞} حصة السلوك علينا وضع الحل في الصورة التالية فقط :

$$\psi_{\infty} = A e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \quad (5.15)$$

وبذلك نتوقع أن يكون الحل الدقيق لمعادلة (5.9) على الصورة التالية :

$$\psi(\xi) = A e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi) \quad (5.16)$$

حيث الدالة $H_n(\xi)$ يمكن أن نعتبرها كدالة متعددة الحدود بدلالة الشخير ξ مرتبها إلى رتبة محددة .

يعنى ذلك أن A هو :

$$\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} = \left[-A \xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi) + A e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n'(\xi) \right] \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{d^2 \psi(\xi)}{d\xi^2} &= \left[A \xi^2 e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n - A \xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H'_n(\xi) - A e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi) \right. \\
 &\quad \left. + \left[A e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H''_n(\xi) - A \xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H'_n(\xi) \right] \right] \\
 &= A e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H''_n(\xi) - 2 A \xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H'_n(\xi) + A \xi^2 e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi) \\
 &\quad - A e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi) \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

وبنى ذلك يكون ناتج التفاضل فى معادلة (5.9) هو :

$$\begin{aligned}
 A e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \left\{ H''_n(\xi) - 2 \xi H'_n(\xi) + (\xi^2 - 1) H_n(\xi) \right\} + (\lambda - \xi^2) H_n(\xi) \\
 \therefore H''_n(\xi) - 2 \xi H'_n(\xi) + (\lambda - 1) H_n(\xi) = 0 \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

ولحل هذه المعادلة نفترض ان الدالة $H_n(\xi)$ هى على صورة متسلسلة تُبنى على الشكل التالى :

$$H_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \xi^n \quad (5.20)$$

$$\therefore H'_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot \xi^{n-1} \quad (5.21)$$

$$\therefore H''_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot \xi^{n-2} \quad (5.22)$$

انما بالتعويض من (5.20) و (5.21) و (5.22) فى (5.19) نحصل

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \xi^{n-2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \xi^{n-1} + (-1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n = 0 \\
 \text{على :} \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

مع ملاحظة ان التسلسلة الاولى في تلك المعادلة يتلأى فيها الحدين الاولين
 $n=0$ ، $n=1$ لذلك نهى نبدأ من $n=2$. وعلى ذلك يمكننا اعادة كتابة
 (5.23) مع استبدال n في التسلسلة الاولى بالقيمة $(n+2)$ وعلى ذلك :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+2)(n+1) a_{n+2} - 2 n a_n + (\lambda - 1) a_n \right\} x^n = 0 \quad (5.24)$$

والمفروض ان هذه المعادلة صحيحة لجميع قيم x وهذا لا يتحقق الا اذا كان
 كل من المعاملات على حدة للمتغير x متوفا لى رتبة n يساوى صفرا . وهذا
 يعنى ان :

$$\left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - (2n+1) - \lambda \right] a_n = 0 \quad (5.25)$$

$$\therefore a_{n+2} = \frac{(2n+1) - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n \quad (5.26)$$

وهذه العلاقة تستطيع بواسطتها حساب اى من المعاملات a_n في المعادلة (5.20)
 بدلالة المعامل الذى يسبقه a_{n-2} .

وحيث ان دالة الموجه حسنة السلوك لذلك يجب ان تنتهى تلك التسلسلة
 (5.20) عند رتبة معينة وليكن الجد المقابل هو المحتوى على a_n وهذا يعنى
 ذبح المعامل a_{n+2} مساويا للمفرو عليه فانه بالتدوين : بذلك في المعادلة (5.26)
 نحصل على :

$$(2n+1) - \lambda = 0 \quad (5.27)$$

حيث ان a_n لا تساوى صفرا .

$$\therefore \lambda = 2n+1 \quad (5.28)$$

وعلى ذلك فالمعادلة (5.19) بعد التحويض فيها عن λ من المعادلة
 (5.28) تأخذ الصورة التالية :

$$H''_n(\xi) - 2\xi H'_n(\xi) + 2n H_n(\xi) = 0 \quad (5.29)$$

وتسمى معادلة هيرميت التفاضلية .

وحيث أن λ مرتبط بالطاقة E للجذب التوافقي تبعاً للعلاقة

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} \quad (5.10)$$

$$\therefore \frac{2E}{\hbar\omega} = (2n + 1)$$

$$\therefore E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega \quad (5.30)$$

وهذه المعادلة تعطي القيم الايجينية لطاقة الجذب التوافقي

• Energy Eigenvalues of the Harmonic Oscillator

ولقد رمزنا لمستويات الطاقة المختلفة للجذب التوافقي بالرمز E_n تمهيداً

عن أنها تعتمد أساساً على عدد الكم n . ونلاحظ أن تلك المستويات تنفصل عن

بعضها بقيم ثابتة هي $\hbar\omega$. ونلاحظ أن أقل مستوى طاقة لا يساوى صفراً كما هو

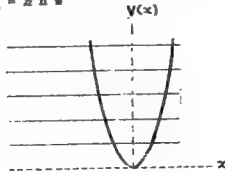
الحال في الميكانيكا الكلاسيكية ولكنه يساوى :

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega \quad (5.31)$$

$$E_2 = \frac{5}{2} \hbar\omega$$

$$E_1 = \frac{3}{2} \hbar\omega$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$$



شكل (٥.٣) رسم يوضح دالة الجهد للجذب التوافقي الهب . ثلاث مستويات

الاولى للطاقة .

وهي في الحقيقة مرتبطة اولاً بمتطلبات من لوازم مبدأ اللانحيد . وقد ادت الى شرح العديد من الظواهر الفيزيائية الخاصة بالحالة الصلبة للمادة وسلوك الغازات المثالية عند درجات الحرارة المنخفضة جداً .

اما بالنسبة لدالة الحالة $\psi(x)$:

$$\psi(x) = A H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot x \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

فان كثير الحدود $H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot x \right)$ الذي يحقق المعادلة (5.30) يسمى كثير الحدود لهيرميت (Hermite Polynomial) ويُعرف على الصورة التالية (للمسألة يعبر عنه بدلالة المتغير المستقل ξ) :

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} e^{-\xi^2} \quad (5.33)$$

كما انه يحقق العلاقات الرياضية التالية :

$$1) \quad H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2n H_{n-1}(\xi) \quad (5.34)$$

$$1.1) \quad H'_n(\xi) = 2n H_{n-1}(\xi) \quad (5.35)$$

$$1.1.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\frac{1}{2}\xi^2})^2 H_n^*(\xi) H_n(\xi) d\xi = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nn} \quad (5.36)$$

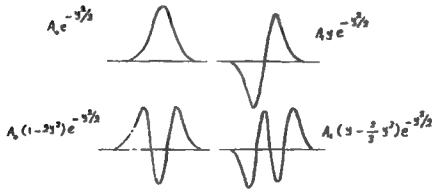
وهذه العلاقة الاخير يمكن كتابتها بدلالة المتغير المستقل x على الصورة التالية :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar} x^2} H_n^*(x) H_n(x) dx = \frac{2^n n! \sqrt{\pi}}{\frac{m\omega}{\hbar}} \delta_{nn} \quad (5.37)$$

ونبينا على محضر قيم $H_n(\xi)$:

$$\begin{aligned}
 H_0 &= 1 \\
 H_1 &= 2\xi \\
 H_2 &= 4\xi^2 - 1 \\
 H_3 &= 8\xi^3 - 12\xi \\
 H_4 &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \\
 H_5 &= 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \end{aligned}} \right\} (5.38)$$

يوضح شكل (٢٠٥) المستويات الثلاث الأولى للطاقة بينما شكل (٢٠٥) يوضح الدوال الاهمة الدوال الذاتية الاولى لمتذبذب توافقي بسيط . يلاحظ مايلي من هذين الشكلين



شكل (٢٠٥) رسم يوضح الاهم دوال الاولى للمتذبذب التوافقي . المخطط .

١ - كما امرنا من قبل فان الخواص الاتية التي تمثل مستويات الطاقة متساوية

التباعد بينها وبين بعضها لان كل مستويين متاليين يغسلهما المقدار $\hbar \omega$.

٢ - ان النقطتين المثلثتين لتلقى القطع المكاني * المثل للطاقة الوضع

$\psi_0(x)$ مع الخط الاتقي الذي تتبعه الدالة الذاتية $\psi_0(x)$ $v = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

(هذا الخط يمثل مستوى الطاقة E_0) هما $x = \pm x_0$ ونحصل

عليها من الشرط $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2$ وعند هذا طاقة الحركة

تساوى صفرا .

٣ - تتبادل الدوال الذاتية ما بين كونها متماثلة (Symmetric) او غير

متماثلة (Antisymmetric) .

٤ - بالنسبة للدالة الذاتية ψ_0 نلاحظ ان لها قيمة محددة خارج المسمى

($x_0 > x > -x_0$) حيث الطاقة الكلية تكون اصغر من طاقة الوضع v

اي ان طاقة الحركة تكون سالبة . وهذا معناه احتمال محدد لتواجد الجسيم

في المنطقة التي فيها تكون طاقة حركته سالبة . وهذا السلوك شائع في ميكانيكا

الكم .

والان بالاستفادة من خاصية المعايير لدالة الحالة $\psi(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx = \delta_{mn}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A H_m \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \right]^* \left[A H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \right] dx$$

$$\begin{aligned}
 &= A_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar} x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) dx \\
 &= A_n^2 \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^n n!}{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}} = 1 \\
 \therefore A_n &= \sqrt{\frac{\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}}{\pi^{\frac{1}{2}} 2^n n!}} \quad (5.39)
 \end{aligned}$$

مثال (١-٥) :

وضح انه بالنسبة للتذبذب التوافقي البسيط في الحالة الاذن الارضية له
 فان احتمال تواجد الجسم المتذبذب خارج الحدود الكلاسيكية هي تقريباً ٠,١٦

الحل :

نعلم ان الحالة الارضية للتذبذب التوافقي المحيط بمتوسط مقدارها

$$E = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

وبناءً للفيزياء الكلاسيكية فان الطاقة الكلية E للتذبذب الذي يتحرك

بسرعة ذبذبة a هي :

$$E = \frac{1}{2} m a^2$$

اذنا السعة a التي تكافئ طاقة $E = \frac{1}{2} \hbar \omega$ هي :

$$a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

يبا ان التغير $\xi = \sqrt{\frac{m}{\hbar}} x$ • اذا عدا تكون $x = \pm a$ فبان
 ξ تأخذ القيم ± 1 كما رأينا قبلًا •

• الاحتمالية ان يكون الجسم المتذبذب خارج نطاق $\xi = \pm 1$ هي :

$$W = \frac{\int_{-1}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi}{\int_{-1}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi} \quad 0.16$$

مثال (٢ - ٥) :

اذا كانت طاقة الوضع لمتذبذب توافقى في ثلاث ابعاد عبارة عن

$$V = \frac{1}{2} m (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)$$

عَيِّن مستويات الطاقة والدوال الموجية المعيارية المتقابلة لها •

الحل :

يمكننا جعل نظرية التذبذب التوافقى البسيط (ذي البعد الواحد) بحيث

تشمل حالة التذبذب في ثلاث ابعاد وذلك باليد* بمعادلة شرودنجر بالصورة التالية :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, y, z) + \left[\frac{1}{2} m (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2) \right] \psi = E$$

وحلها بطريقة فصل المتغيرات على اساس ان الدالة ψ يفترض انها بالصورة التالية :

$$\psi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

وبالتعويض عنها في معادلة شرودنجر نجد ان :

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega_1^2 x^2 \right] \\ & + \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{2} m \omega_2^2 y^2 \right] \\ & + \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{1}{2} m \omega_3^2 z^2 \right] = E \end{aligned}$$

وعليه فان :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega_1^2 x^2 = E_1 \quad (1)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{2} m \omega_2^2 y^2 = E_2 \quad (2)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{1}{2} m \omega_3^2 z^2 = E_3 \quad (3)$$

$$E_1 + E_2 + E_3 = E \quad \text{حيث}$$

وكل من معادلات (1) و (2) و (3) لها الا معادلة متماثل

$$\psi_n(r) = N_n e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}} J_n(\alpha r)$$

$$K_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi 2^n n!}} \quad , \quad \xi = \alpha r = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} r$$

بناءً عليه الحلول المحددة التي يمكن الوصول اليها هي المعادلة لكل من :

$$E_1 = (n_1 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_1 \quad ; \quad n_1 = 0, 1, 2, \dots$$

$$E_2 = (n_2 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_2 \quad ; \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

$$E_3 = (n_3 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3 \quad ; \quad n_3 = 0, 1, 2, \dots$$

$$\therefore E = (n_1 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_2 + (n_3 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3$$

والدوال المعيارية القابلة هي :

$$\psi_{n_1, n_2, n_3} = \left[\frac{1}{2^n n_1! n_2! n_3! \pi^{3/2}} \right]^{\frac{1}{2}} H_{n_1}(\xi) H_{n_2}(\eta) H_{n_3}(\zeta) e^{-\frac{\rho^2}{2}}$$

حيث

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega_1}{\hbar}} x \quad ; \quad \eta = \sqrt{\frac{m\omega_2}{\hbar}} y \quad ; \quad \zeta = \sqrt{\frac{m\omega_3}{\hbar}} z$$

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

وفي الحالة الخاصة التي يتميز فيها التجاذب المتوافق بالتجانس فإن
 $w_1 = w_2 = w_3 = w$ وعلى هذا فإن القيم اللاحقة تكون :

$$E_{n_1 n_2 n_3} = (n + \frac{3}{2}) \hbar w$$

$$n = n_1 + n_2 + n_3 \quad \text{حيث}$$

ويمكننا حساب درجة الانحلال degree of degeneracy لأي مستوى طاقي

عدد التكملة n بملاحظة أنه إذا كان n_1 هي الأخرى معلومة فإن العدديين
 n_2 و n_3 تأخذ القيم :

$$(0, n-n_1); (1, n-n_1-1); (2, n-n_1-2); \dots, (n-n_1, 0)$$

وعلى ذلك يكون هناك عدد من الحالات يساوي $(n - n_1 + 1)$ ولكن n_1 يمكن أيضا ان تأخذ أى قيمة بين $(0, n)$ وعليه فان درجة الانحلال تكون :

$$(n+1) + n + (n-1) + (n-2) \dots + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

—————→

الباب السادس

المعالجة الكمية لجسيم يتحرك في مجال قوة مركزية
(مجموعات شبيهة ذرة الهيدروجين)

Quantum Mechanical Treatment of the Motion of a Particle
in a Central-Force Field
(Hydrogen-Atom-Like Systems)

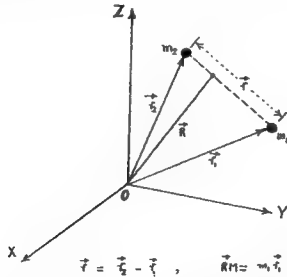
الباب السادس

المعالجة الكمية لجسيم يتحرك في مجال قوة مركزية (مجموعات شبيهة ذرة الأيدروجين) Quantum Mechanical Treatment of the Motion of a Particle in a Central-Force Field (Hydrogen-Atom-Like Systems)

نود في هذا الباب معالجة حركة جسيم يتحرك تحت تأثير قوة جذب مركزية مثل القوة الكولومبية التي بين شحنة الإلكترون $(-e)$ وشحنة نواة ذرته الام $(+Ze)$ حيث كالمعتاد z هو العدد الذري للنواة. هذه المركزية تقابل طاقة جهد مركزية ولكن $V(r)$ حيث

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze \cdot e}{r} \quad (6.1)$$

ويتضح من ذلك ان $V(r)$ تعتمد فقط على البعد النسبي بين الجسيمين وهذا



$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$$

شكل (١-٦) رسم يوضح احتزال حركتي الجسيمين m_1 و m_2 الى حركة جسيم مفرد كتلته u بانتميه مائلا الى جهة مركزية. كما ان الهاميلتونية لهذه المجموعة تأخذ الصورة التالية :

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(r) \quad (6.2)$$

حيث يمثل الحد الاول : طاقة الحركة لاجد الجسمين وليكن الالكترون مثلاً .
يمثل الحد الثانى طاقة الحركة للجسيم الآخر وليكن البروتون . أما $V(r)$
فتمثل طاقة الجهد الكولومى بين شحنتيهما . ونلاحظ ان البعد بين الجسمين r
عبارة عن :

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (6.3)$$

وعلى ذلك تكون المعادلة الهاميلتونية لتلك المجموعة التفاضلية هي :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (6.4)$$

وتكون معادلة شرودنجر لهذه المجموعة كما يلى :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi(x_1, x_2) = E_{\text{total}} \psi(x_1, x_2) \quad (6.5)$$

وحيث ان هذه المعادلة تعتمد على متغيرات ومن الصعب بمال حلها
لذا نُحوّل هذه المعادلة الى معادلتين احدهما تمثل حركة جسيم واحد مكافئ . هو
مركز الكتلة (Centre of mass) للمجموعة والاخرى تمثل الحركة النسبية بين
الجسمين . ويتم ذلك باختيار احدائين هما \vec{R} و \vec{r} حيث \vec{R} هو احدائى
مركز الكتلة ويعرف على النحو التالى :

$$\vec{R} (m_1 + m_2) = M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$$

$$M\vec{R} = m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 \quad (6.6)$$

$$Y_R = m_1 y_1 + m_2 y_2$$

$$Z_R = m_1 z_1 + m_2 z_2$$

بينما x سبق تعريف بالمعادلة (6.2) •

وتحويل المعادلة (6.5) بدلالة تلك الاحداثيات نحصل على :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x) \right] \psi(x, R) = E_{\text{total}} \psi(x, R)$$

$$= E_{\text{total}} (\Omega(R) \cdot U(x)) \quad (6.7)$$

حيث μ هي الكتلة المختزلة (reduced mass) وتعرف كالمتاد كمايلي :

$$\mu = \left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right]^{-1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (6.8)$$

بينما الطاقة الكلية E_{total} هي في هذه الحالة مجموع الطاقة الكلية لمركز الكتلة E_0 والطاقة الكلية المرتبطة بالحركة النسبية E أي ان :

$$E_{\text{total}} = E_0 + E \quad (6.9)$$

وتلجئ طريقة فصل المتغيرات كما سبق ان درسنا (انظر صفحة VI) نحصل على المعادلتين التاليتين :

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Omega(R) = E_0 \Omega(R) \quad (6.10)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U(x) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 x} U(x) = E_{\text{rel}} U(x) \quad (6.11)$$

واضح ان المعادلة (6.10) تمثل موجه مستوية صاحبة لحركة جسيم حركته M ولذلك يبقى لدينا التركيز على المعادلة (6.11) للحركة النسبية والتي تمثل حركة جسيم كتلته μ في مجال يتحيز بطاقة جهده $V(x)$ ولاننا اذا امتتناج مستويات الطاقة E المرتبطة بتلك الحركة النسبية :

بما ان هذه الحركة التي تمثلها المعادلة (6.11) هي حركة تحت تأثير قوة مركزية وفيها طاقة الجهد $V(r)$ هي دالة فقط للتغير r فانه من المناسب التعبير عن عامله اللاپلاسيان فيها بدلالة المتغيرات (r, θ, ϕ) ، الاحداثيات الكرية والتي يمكننا بعد ذلك فصلها عن بعضها لان $V(r)$ تتميز بتماثل كوسى وذلك باتباع طريقة فصل المتغيرات السابق لنا دراستها . ان :

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\}$$

$$U(r, \theta, \phi) = \frac{2m}{\hbar^2} \left[E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] U(r, \theta, \phi) \quad (6.12)$$

وكما امرنا من قبل بما ان طاقة الجهد $\sim \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ تتميز بتماثل كوى لذا يمكننا فصل المتغيرات (r, θ, ϕ) في معادلة (6.12) كما يلى :

نضع الدالة $U(r, \theta, \phi)$ على الصورة التالية :

$$U(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot Y(\theta, \phi) \quad (6.13)$$

$$\therefore Y(\theta, \phi) \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{R(r)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y(\theta, \phi)$$

$$+ R(r) \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Y(\theta, \phi)$$

$$+ \frac{2m}{\hbar^2} r^2 \left[E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] R(r) Y(\theta, \phi) = 0 \quad (6.14)$$

وبتسمية هذه المعادلة على : $U(x, \theta, \phi) = R(x) Y(\theta, \phi)$
نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \frac{\partial}{\partial x}) R(x) + \frac{2\mu x^2}{\hbar^2} \left[E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 x} \right] = \\ = - \frac{1}{\sin \theta Y(\theta, \phi)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) Y(\theta, \phi) \\ - \frac{1}{Y(\theta, \phi) \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Y(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (6.15)$$

وهي نلاحظ ان الطرف الايمن دالة في المتغيرين θ, ϕ بينما الطرف الايسر دالة فقط للمتغير x وعلى ذلك فانها لا تتحقق لجميع قيم المتغيرات x, θ, ϕ الا اذا كان كل طرف منها على حدة يساوى ثابتا مشتركا لا يعتمد على اى من تلك المتغيرات * ولنرمز له بالرمز λ

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \frac{\partial}{\partial x}) R(x) + \frac{2\mu x^2}{\hbar^2} \left[E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 x} \right] = \\ = - \frac{1}{\sin \theta Y(\theta, \phi)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) Y(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$- \frac{1}{Y(\theta, \phi) \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Y(\theta, \phi) = \quad (6.17)$$

مرة اخرى بالتعبير عن الدالة $Y(\theta, \phi)$ على انها حاصل ضرب دالتين اخريتين $\Phi(\theta) \cdot \Theta(\phi)$ اى ان :

$$Y(\theta, \phi) = \Phi(\theta) \cdot \Theta(\phi) \quad (6.18)$$

يحمل على المعادلة :

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{\Phi(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(\theta) \right) + \lambda \sin \theta \\ = - \frac{1}{\Phi(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Phi(\theta) \end{aligned} \quad (6.19)$$

حيث الطرف الايمن فيها دالة فقط للتغير θ بينما الطرف الايسر دالة فقط للتغير θ وعلى هذا نكل منها يساوى ثابتا مشتركا آخروليكن β فنحصل على :

$$- \frac{1}{\Phi(\theta)} \frac{d^2}{d\theta^2} \Phi(\theta) = \beta \quad (6.20)$$

$$\frac{\sin \theta}{\Phi(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(\theta) \right) + \lambda \sin^2 \theta = \beta \quad (6.21)$$

ونلاحظ ان المعادلة (6-20) باطارة ترتيبها كما يلى :

$$\frac{d^2 \Phi(\theta)}{d\theta^2} + \beta \Phi(\theta) = 0$$

يتضح ان الحل العام لها هو

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= C e^{\pm 1\sqrt{\beta} \theta} \\ &= C e^{\pm i m \theta} \end{aligned} \quad (6.22)$$

حيث

$$m = \sqrt{\beta} \quad (6.23)$$

وحيث ان الدالة $\Phi(\theta)$ يجب ان تكون وحيدة القيمة • كما ان من خصائصها
ان تُعيد قيمتها عندما تزداد الزاوية θ بمقدار 2π بمعنى ان :

$$\Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi) \quad (6.24)$$

فان ذلك معناه

$$C e^{im\theta} = C e^{im(\theta+2\pi)} = C e^{im\theta} \cdot e^{im(2\pi)}$$

$$\therefore 1 = e^{im(2\pi)} = \cos m(2\pi) + i \sin m(2\pi)$$

$$\therefore 1 = \cos m(2\pi) \quad (6.25)$$

$$\therefore m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (6.26)$$

$$\therefore \Phi(\theta) = C e^{\pm im\theta} \quad (6.27)$$

وقد سبق ان درسنا مثال (ψ_{θ}) ان المعادلة التي تتكامل المركبة L_z كنتيجة
كمية الحركة الدورانية L_z عبارة عن :

$$\hat{L}_z = i \hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (6.28)$$

فاذا افترضنا بطل المعادلة على الدالة (6.27) نحصل على :

$$\hat{L}_z \Phi(\theta) = i \hbar \frac{\partial}{\partial \theta} (C e^{\pm im\theta})$$

$$\therefore \hat{L}_z \Phi(\theta) = \pm \hbar m \Phi \quad (6.29)$$

هذه المعادلة الايجتية توضح ان الدالة Φ هي دالة خاصة للمعالة \hat{L}_z تتكامل
القيم الذاتية $m \hbar$ ويسمى الرقم m بعدد الكم المغناطيسى للحركة الدائرية
Orbital Magnetic Quantum Number الذى يتميز بانه ساذج لاعداد صحيحه

فقط كما هو موضح في معادلة (6.26) • وسبب هذه التسمية انه شوهد بالتجربة ان اتصال مستويات الطاقة المرتبطة بحركة الالكترونات الدائرية في ذراتها عندما تكون تلك الذرات تحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي واصطلى على ان يكون اتجاهه موازيا للاحداثي z •

وهنا يبقى إيجاد قيمة الثابت c في المعادلة (6.27) ويتم ذلك باستخدام خاصية المعاكسة للدالة Φ كما يلي :

$$\therefore \int_0^{2\pi} \Phi^* \Phi d\theta = 1$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \left[c e^{-im\theta} \right]^* \left[c e^{-im\theta} \right] d\theta = 1$$

$$\therefore |c|^2 \cdot 2\pi = 1$$

$$\therefore c = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\therefore \Phi(\theta) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm im\theta} \quad (6.30)$$

والآن باستخدام النتيجة (6.23) يمكن كتابة المعادلة (6.21) على النحو التالي :

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Phi(\theta) + \lambda \sin^2 \theta = \beta = m^2 \quad (6.31)$$

وبإعادة ترتيب تلك المعادلة نحصل على :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Phi(\theta) + \left[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Phi(\theta) = 0 \quad (6.32)$$

ويمكن تبسيط هذه المعادلة بوضع

$$\cos \theta = \mu$$

ويعني آخر يكون لدينا دالة جديدة P للتمثيل μ بحيث :

$$P(\mu) = \Theta(\theta) \quad (6.33)$$

وفي نفس الوقت

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \mu^2} \quad (6.34)$$

كما ان :

$$\frac{d\mu}{d\theta} = - \sqrt{1 - \mu^2} \quad (6.35)$$

$$\cdot \quad \frac{d}{d\theta} = \frac{d}{d\mu} \frac{d\mu}{d\theta} = - \sqrt{1 - \mu^2} \frac{d}{d\mu} \quad (6.36)$$

وعلى ذلك تختزل معادلة (6.32) للصورة التالية :

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \right] P(\mu) + \left[\lambda - \frac{\mu^2}{1 - \mu^2} \right] P(\mu) = 0$$

أى ان :

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2}{d\mu^2} P(\mu) - 2\mu \frac{d}{d\mu} P(\mu) + \left[\lambda - \frac{\mu^2}{1 - \mu^2} \right] P(\mu) = 0 \quad (6.37)$$

مع ملاحظة ان قيمة التغير المستقل μ تتغير بين القيمتين $+1$ و -1 .
ونريد الآن ايجاد حلول لهذه المعادلة (6.37) بشرط ان تكون وحيدة القيمة ،
ومتصلة ، وذات قيم محددة مع إمكانية معايرتها . ويتأخر الطرق القياسية الرياضية
فان ذلك يتم بالتعبير عن الدالة $P(\mu)$ على صورة متسلسلة قوى مع مراعاة ان لها
نقطتين شاذتين (مفردتين) Two Singular Points عند $\mu_0 = \pm 1$.

وبادخال المتغير المستقل ϵ بدلا من المتغير μ على الصورة :

$$\epsilon = (1 - \mu^2) \quad (6.38)$$

فان النقطة المفردة $\mu_0 = \pm 1$ تتقابل $\epsilon_0 = 0$ وعلى ذلك فان سلسلة القوى الخاصة بالدالة $P(\mu)$:

$$P(\mu) = \left| (\mu - \mu_0) \right| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\mu - \mu_0)^n \quad (6.39)$$

يمكن استبدالها بسلسلة قوى بدلالة المتغير ϵ على الصورة التالية :

$$P(\epsilon) = (\epsilon - \epsilon_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\epsilon - \epsilon_0)^n \quad (6.40)$$

وحيث ان $\epsilon_0 = 0$ فان الحل يكتب على الصورة الاتية :

$$P(\epsilon) = \epsilon^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n \epsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \epsilon^{n+r} \quad (6.41)$$

وعلى ذلك :

$$\frac{dP}{d\epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) \epsilon^{n+r-1} \quad (6.42)$$

$$\frac{d^2 P}{d\epsilon^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) (n+r-1) \epsilon^{n+r-2} \quad (6.43)$$

وحيث ان :

$$\frac{d}{d\mu} = \frac{d\epsilon}{d\mu} \frac{d}{d\epsilon} = -2\mu \frac{d}{d\epsilon} = \mp 2 \sqrt{1-\epsilon} \frac{d}{d\epsilon} \quad (6.44)$$

$$\epsilon \frac{d^2}{d\mu^2} = -2 \frac{d}{d\epsilon} + 4(1-\epsilon) \frac{d^2}{d\epsilon^2} \quad (6.45)$$

تصبح المعادلة (6.37) على الصورة التالية :

$$\epsilon \left[4 (1 - \epsilon) \frac{d^2}{d\epsilon^2} - 2 \frac{d}{d\epsilon} \right] P(\epsilon) - 2 (1 - \epsilon) (-2 - 1 - \epsilon \frac{d}{d\epsilon}) P(\epsilon) + \left[\lambda - \frac{m^2}{\epsilon} \right] P(\epsilon) = 0 \quad (6.46)$$

$$4 \epsilon (1 - \epsilon) \frac{d^2}{d\epsilon^2} P(\epsilon) - 2 \epsilon \frac{dP(\epsilon)}{d\epsilon} + 4 (1 - \epsilon) \frac{dP(\epsilon)}{d\epsilon} + \left[\lambda - \frac{m^2}{\epsilon} \right] P(\epsilon) = 0 \quad (6.47)$$

$$\therefore 4 \epsilon (1 - \epsilon) \frac{d^2}{d\epsilon^2} P(\epsilon) + \{4 - 6 \epsilon\} \frac{dP(\epsilon)}{d\epsilon} + \left[\lambda - \frac{m^2}{\epsilon} \right] P(\epsilon) = 0 \quad (6.48)$$

وبالتمويه نرى (6.48) من (6.41) * (6.42) * (6.43) ونتجيب
معادلات القوى المتساوية للمتغير ϵ نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 4(n+r) (n+r-1) + 4(n+r) - m^2 \right\} a_n \epsilon^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \lambda - 4(n+r) (n+r-1) - 6(n+r) \right\} a_n \epsilon^{n+r} = 0 \quad (6.49)$$

بساواة معامل المتغير : الموضع لاصغر قوة وهي $(r-1)$ بالمفر نحصل على :

$$\left\{ 4 r (r-1) + 4 r - m^2 \right\} a_0 = 0 \quad (6.50)$$

وحيث ان a_0 لاتساوى صفرا فان :

$$4 r (r-1) + 4 r - m^2 = 0$$

$$\therefore r = \frac{1}{2} \left| m \right| \quad (6.51)$$

بينما اذا اردنا مساواة معامل \in^{n+r} بالصفر فيجب اولاً ان نستبدل في التسلسلة الاولى من المعاداة (4.49) كل n بالقيمة $(n+1)$ وعلى ذلك نحصل على :

$$\begin{aligned} & \sum \left\{ 4 (n+1+r) (n+r) + 4 (n+1+r) - m^2 \right\} a_{n+1} \in^{n+r} \\ & + \sum \left\{ \lambda - 4 (n+r) (n+r-1) - 6 (n+r) \right\} a_n \in^{n+r} = 0 \quad (6.52) \\ \therefore a_{n+1} &= \frac{4 (n+r) (n+r-1) + 6(n+r) - \lambda}{4 (n+r+1) (n+r) + 4 (n+r+1) - m^2} \cdot a_n \quad (6.53) \end{aligned}$$

وحيث ان الدالة $P(\epsilon)$ يجب ان تكون حصة السلولة وذات قيمة محدودة فنعنسى ذلك ان التسلسلة يجب ان تنتهى عند حد معين وليكن الحد الذى فيه المعامل a_n ومعنى ذلك بالتالى ان المعامل a_{n+1} يجب ان يساوى صفراً وهذا معناه :

$$4 (n+r) \left[(n+r) - 1 + 6 (n+r) \right] - \lambda = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lambda &= 4 (n+r)^2 + 2 (n+r) \\ &= 2 (n+r) \left\{ 2 (n+r) + 1 \right\} \\ &= (2n+2r) \left\{ (2n+2r) + 1 \right\} \\ &= (n^2 + m) ((n^2 + m) + 1) \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda = \ell (\ell + 1)$$

حيث

$$\ell = n^2 + |m|$$

مع مراعاة ان

$$n^* = 0, 2, 4, 6, \dots$$

بينما

$$|m| = 0, 1, 2, 3, \dots$$

أى ان

$$l = n^* + |m| = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

وحيث ان

$$|m| = l - n^*$$

إذا أكبر قيمة $|m|$ هى التى تقابل n^* تساوى صفراً . أى ان أكبر قيمة $|m|$ هى $\pm l$.

$$\therefore m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \quad (6.54)$$

أى ان لعدد الكم المغناطيسى قيا عدد $(2l + 1)$ قيمه يمكنه وبالتالى يفرع عن $|m| = \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$ فى المعادلة (6.42) نجد ان :

$$\begin{aligned} P(\epsilon) &= (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} |m| \sum a_n (1 - \mu^2)^n \\ &= (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} |m| B(\mu) \end{aligned} \quad (6.55)$$

وعلى ذلك تصبح المعادلة (6.37) على الصورة الاتية :

$$\begin{aligned} (1 - \mu^2) \frac{d^2 B(\mu)}{d\mu^2} - 2(|m| + 1) \mu \frac{dB(\mu)}{d\mu} \\ + l(l + 1) - |m|(|m| + 1) B(\mu) = 0 \end{aligned} \quad (6.56)$$

وهذه هي معادلة لجندر المرتبطة Legendre's Associated Equation
 يتبعها للنظر القياسية لمعالجتها فان حلول هذه المعادلة هي ما تسمى بدوال لجندر
 المرتبطة - Associated Legendre's Functions : وتأخذ الصورة التالية :

$$P_l^{|m|}(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{d\mu^{|m|}} P_l(\mu) \quad (6.57)$$

حيث $P_l(\mu)$ تقابل الحالة الخاصة التي فيها $m = 0$ وعندئذ تسمى هذه الدالة
 $P_l^0(\mu)$ بدالة لجندر العادية . وعلى ذلك فان الدالة المشتركة للمتغيرين θ و ϕ و
 أي $Y(\theta, \phi)$ هي :

$$\begin{aligned} Y(\theta, \phi) &= Y_{lm}(\theta, \phi) = N_{lm} P_l^m(\cos \theta) \Phi_m(\phi) \\ &= N_{lm} P_l^m(\cos \theta) \cdot \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \quad (6.58)$$

حيث N_{lm} هو ثابت المعايرة للدالة Normalisation Factor ونحصل عليه
 من شرط المعايرة وخاصة الاستعامدية :

$$\begin{aligned} &\int_1^{-1} \int_0^{2\pi} Y_{l'm'}(\theta, \phi) Y_{lm}(\cos \theta) d(\cos \theta) d\phi \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{l'm'}(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) (-\sin \theta d\theta d\phi) \\ &= \delta_{ll'} \delta_{m'm} = 1 \quad \text{if } l = l' \quad , \quad m = m' \\ &= 0 \quad \text{if } l \neq l' \quad \text{or } m \neq m' \end{aligned}$$

وهذا يؤدي الى العلاقة التالية لهذا الثابت N_{lm}

$$N_{lm} = \frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!} \quad (6.59)$$

وينطبق لدينا الآن معالجة معادلة شرودنجر الخاصة بالدالة النصف تطريسية $R(r)$ للوصول الى الصورة النهائية للدالة الموجية $\psi(r, \theta, \phi)$ وهذا يتم على سبيل النحو التالي :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) R(r) + \left[\frac{2\mu E}{\hbar^2} + \frac{2\mu Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r \hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (6.60)$$

حيث نؤتى عن الثابت λ باستدراك $l(l+1)$ وعن $V(r)$ بالقسـدار $(-2e^2/4\pi\epsilon_0 r)$

ومن المناسب تبسيط المعادلة (6.60) باستبدال الدالة $R(r)$ بدالة جديدة $u_l(r)$ العلاقة بينهما هي :

$$u_l(r) = r R(r) \quad (6.61)$$

تصبح المعادلة (6.60) على الصورة التالية :

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} u_l(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E \right) u_l(r) = 0 \quad (6.62)$$

مع مراعاة ان الدالة u_l تتصف بانها تعتمد على قيمة عدد الكم l كما انها تحقق كلا من شرط المعايير وشرط التلاشى عند $r = 0$ و $r = \infty$

ولتبسيط المعالجة الرياضية مرة اخرى نمر عن التغير المستقل r بوحدات نصف قطر بوهر r_B بحيث :

$$\frac{r}{r_B} = \rho \quad (6.63)$$

حيث

$$r_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu Ze^2}$$

وبذلك نكون قد استبدلنا الهمد x بتغير ρ ليس له ابعاد * والشكل
نستبدل الطاقة الكلية E بكمية ليس لها ابعاد وذلك بالتعبير عن E
بدلالة ثابت ريدبرج ϵ_{Rd} حيث

$$\epsilon = \frac{E}{\epsilon_{Rd}} \quad (6.64)$$

$$\epsilon_{Rd} = \frac{4\pi e^2 \hbar^2}{m^2} \quad (6.65)$$

وطيه تصبح المعادلة (6.62) على الصورة الاتية :

$$\frac{d^2 u_f(\rho)}{d\rho^2} + \left[\frac{2}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{\epsilon^2}{1} \right] u_f(\rho) = 0 \quad (6.65)$$

مع مراعاة ان الطاقة ϵ هي في الحقيقة كمية سالبة لأن الالكترون في ذرة الهيدروجين
وماشابهها يكون مجموعة مرتبطة (اي انه ليس حرا) ولذلك تكتب المعادلة الاخيرة
(6.65) على الصورة التالية :

$$\frac{d^2 u_f(\rho)}{d\rho^2} + \left[\frac{2}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \epsilon \right] u_f(\rho) = 0 \quad (6.66)$$

وعندما تقرب ρ من ما لا نهاية فان المعادلة (6.66) تختزل الى الصورة التالية :

$$\frac{d^2 u_f(\infty)}{d\rho^2} - \epsilon u_f(\infty) = 0 \quad (6.67)$$

فيكون الحل الاسيمتوتى Asymptotic Solution هو

$$u_f(\infty) = e^{-\sqrt{\epsilon}\rho} \quad (6.68)$$

حيث اخذنا في الاعتبار حسن سارنر الدالة وعلى هذا يكون الحل العام للدالة
هو $u_f(\rho)$

$$u_f(\rho) = u_f(\infty) \quad \Psi_f(\rho) = e^{-\sqrt{\epsilon} \cdot \rho} \quad \Psi_f(\rho) \quad (6.69)$$

وحيث أن المعادلة (6.66) تتصف بأن لها نقطة شاذة (مفردة) عند $\rho_0 = 0$ لذا نتبع نفس الأسلوب المتبع في مثل هذه الحالة والذي أوضحناه عند إيجاد الحسب $\Psi_f^m(0, \theta)$ وهذا معناه وضع الدالة $\Psi_f(\rho)$ على الصورة التالية :

$$\Psi_f(\rho) = \sum_k a_k (\rho - \rho_0)^{k+s} = \sum_k a_k \rho^{k+s} \quad (6.70)$$

$$\therefore \frac{du_f}{d\rho} = e^{-\sqrt{\epsilon} \cdot \rho} \left(\sum_k a_k (k+s) \rho^{k+s-1} \right) \\ - \sqrt{\epsilon} \cdot e^{-\sqrt{\epsilon} \cdot \rho} \sum_k a_k \rho^{k+s} \quad (6.71)$$

$$\therefore \frac{d^2 u_f}{d\rho^2} = e^{-\sqrt{\epsilon} \cdot \rho} \left[\sum_k a_k (k+s) (k+s-1) \rho^{k+s-2} \right] \\ - \sqrt{\epsilon} e^{-\sqrt{\epsilon} \cdot \rho} \left[\sum_k a_k (k+s) \rho^{k+s-1} \right] \\ - \sqrt{\epsilon} e^{-\sqrt{\epsilon} \cdot \rho} \left[\sum_k a_k (k+s) \rho^{k+s-1} \right] \\ + \epsilon e^{-\sqrt{\epsilon} \cdot \rho} \left[\sum_k a_k \rho^{k+s} \right] \quad (6.72)$$

$$\therefore e^{-\sqrt{\epsilon} \cdot \rho} \left[\sum_k a_k (k+s) (k+s-1) \rho^{k+s-2} \right. \\ \left. - 2 \sqrt{\epsilon} \cdot \sum_k a_k (k+s) \rho^{k+s-1} \right. \\ \left. + \epsilon \sum_k a_k \rho^{k+s} \right] \\ + \left[2 \sum_k a_k \rho^{k+s-1} - \ell(\ell+1) \sum_k a_k \rho^{k+s-2} \right. \\ \left. - \epsilon \sum_k a_k \rho^{k+s} \right] e^{-\sqrt{\epsilon} \cdot \rho} = 0 \quad (6.73)$$

$$\begin{aligned} \therefore & \left[\sum_k a_k (k+s)(k+s-1) \rho^{k+s-2} - 2\sqrt{\epsilon} \sum_k (k+s) \rho^{k+s-1} \right] \\ & + \left[2 \sum_k a_k \rho^{k+s-1} - l(l+1) \sum_k a_k \rho^{k+s-2} \right] = 0 \quad (6.74) \\ & \text{وبسالة معامل أقل قوة (s-2) للمتغير } \rho \text{ بالصفر نحصل على :} \\ & s(s-1) - l(l+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore s = -l \quad (6.75)$$

$$s = l+1 \quad (6.76)$$

ولكن الحل $s = -l$ لا يحقق الشرط الحدى عند نقطة الأصل ($\rho = 0$) لهذا يجب علينا استبعاد $s = -l$ ويتبقى الحل المقابل $s = l+1$ وبالتفويض عن $s = l+1$ في المعادلة (6.74) مع استبدال القيمة k بالقيمة $k+1$ في التسمية الأولى نقول للحصول على معادل ρ^{k+l} نجد ان :

$$\begin{aligned} \sum_k a_{k+1} (k+l+2)(k+l+1) \rho^{k+l} - l(l+1) a_{k+1} \rho^{k+l} \\ - 2\sqrt{\epsilon} \sum_k a_k (k+l+1) \rho^{k+l} + 2 \sum_k a_k \rho^{k+l} = 0 \quad (6.77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_k \left[\{ (k+l+2)(k+l+1) - l(l+1) \} a_{k+1} \right. \\ \left. - 2 \{ \sqrt{\epsilon} (k+l+1) + 1 \} a_k \right] \rho^{k+l} = 0 \quad (6.78) \end{aligned}$$

هذه المعادلة صحيحة لجميع قيم ρ وهذا معناه ان معامل ρ مرتبة لأي قوة $k+l$ يجب ان يكون مساويا للصفر على هذا نحصل على معادلة ربط المتباينلات التالية :

$$a_{k+1} = \frac{2(\sqrt{\epsilon}(k+l+1) - 2)}{(k+l+2)(k+l+1) - l(l+1)} a_k \quad (6.79)$$

وبما ان التسلسلة يجب ان تكون ذات قيمة محدودة اى يجب ان تنهى عند حد معين
ولكن الحد رقم k هو آخر حد فيها لذلك فالمعامل a_{k+1} يجب ان يساوى
صفرًا وهذا معناه ان :

$$\sqrt{\epsilon}(k+l+1) = 2 \quad (6.80)$$

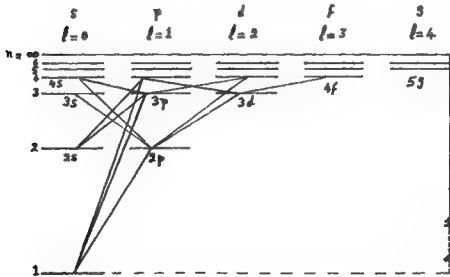
$$(k+l+1) = n \quad \text{وبوضع}$$

$$\therefore \sqrt{\epsilon} \cdot n = 2$$

$$\therefore \epsilon = \frac{2^2}{n^2} \quad (6.81)$$

$$\therefore k = -\frac{\epsilon R_d}{n^2} z^2 \quad (6.82)$$

حيث $n = 1, 2, 3, \dots$ وهي نفس النتيجة التى حصل عليها العالم
بوهر قبل اكتشاف ميكانيكا الكم بحوالى احدى عشر عامًا كما هو معلوم .



شال (١-٦) :

عين مستويات الطاقة والدوال الموجية المقابلة لجسيم يتحرك داخل بئر جهدي يتميز بشاغل كروي ونصف قطره a والصفات الحدية التالية :

في حالة x اصغر من a $V(x) = 0$ ($x < a$)
وفي حالة x اكبر من a $V(x) = \infty$ ($x > a$)

الحل :

في حالة متذبذب توافقى متجانس في الأبعاد الثلاثة فان طاقة الوضع تأخذ الصورة :

$$V = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) \\ = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

وعلى ذلك فان الجهد يتميز بشاغل كروي وبالتالي فمن الممكن حل معادلة شرودنجر باستخدام الاحداثيات الكرية * حيث يكون الجزء الزاوي من الدالة الموجية هو الدالة التوافقية الكرية $Y_{lm}(\theta, \phi)$ ويمكن اذا كتابة الدالة الموجية بالصورة :

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

حيث الجزء النصف قطري من الدالة الموجية $R(r)$ يحقق المعادلة :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{m\omega^2 r^2}{2} \right] R(r) = 0$$

وبادخال متغير يتميز بأنه ليس له ابعاد :

$$\xi = \frac{m\omega}{\hbar} r^2$$

نحصل على :

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{3}{2} \frac{dR}{d\xi} + \left[\frac{R}{2} - \frac{l(l+1)}{4\xi} - \frac{\xi}{4} \right] R(\xi) = 0$$

وعند $\xi \rightarrow \infty$ (ξ تقرب من ما لا نهاية) فان حل تلك المعادلة يصبح

$$R(\xi) \sim e^{\pm \frac{\xi}{2}}$$

وهذا يشير الى إمكانية الوصول الى حل دقيق للمعادلة أعلاه على صورة :

$$R(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} a_r \xi^{r+s}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية التي نود حلها نحصل على :

$$s(s-1) + \frac{3}{2}s - \frac{l(l+1)}{4} = 0$$

وجذورها التمييزي الموجب هو :

$$s = \frac{1}{2}l$$

(ويستخدم الجذر التمييزي السالب حيث ذلك يؤدي الى جعل الدالة $R(\xi)$

تقرب من ∞ عند $x = 0$ وعلى ذلك فان باستطاعتنا فرض الحل بالصورة :

$$R(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{l}{2}} W(\xi)$$

حيث يحقق الجزء $W(\xi)$ العلاقة التالية :

$$\xi \frac{d^2 W}{d\xi^2} + [c - \xi] \frac{dW}{d\xi} - b W(\xi) = 0$$

وفيهما $c = l + \frac{3}{2}$ و $b = -\frac{l}{2} + \frac{3}{2}$ وهذه المعادلة

هي المعادلة الهندسية التي ينتهي اليها في التحليل الحالي وحلها الذي يشتمل

بعدم التفرق عند $0 = 0$:

$$W(\xi) = {}_1F_1(b, c, \xi)$$

$$= \left[1 + \frac{b}{c} \frac{\xi}{1!} + \frac{b(b+1)}{c(c+1)} \frac{\xi^2}{2!} + \frac{b}{c} \frac{(b+1)(b+2)}{(c+1)(c+2)} \frac{\xi^3}{3!} + \dots \right]$$

وإذا لم توضع نهاية لهذه التسلسلة فإن الدالة P يحدث أن تتفرق مثل $\exp(\xi)$ عندما تقرب ξ من ∞ ، ومعنى هذا أن $R(\xi)$ هي بالتالي تتفرق شـمـل $\exp(\xi/2)$ ، وعلى ذلك يجب أن يوضع نهاية للتسلسلة وهذا يعني أن :

$$b = 0, -1, -2$$

$$b_i = -\frac{E}{2\hbar\omega} + \frac{l}{2} + \frac{3}{2} = -p ; \quad [p = 0, 1, 2, \dots]$$

$$b_i = E = 2\hbar \left[l + 2p + \frac{3}{2} \right]$$

ويتضح من هذه النتيجة أن التجاذب التوافقي التجانسي ثلاث أبعاد يتميز بمجموعة لانتهائية من مستويات طاقة منفصلة يقيم تماثلية عن بعضها .

وباستخدام الخصائص الأساسية للدوال الهندسية يمكن توسيع أن السـمـدوال الأيجينية المعاييرة تعطى كما يلي :

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sqrt{2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{l+3}{4}} \left[\frac{(l+\frac{3}{2})(l+\frac{5}{2}) \dots (l+p+\frac{3}{2})}{\Gamma(l+\frac{3}{2}) p!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \cdot \exp\left(-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}\right) r^l P_l(-p, l+\frac{3}{2}, \frac{m\omega r^2}{\hbar}) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

عندما تكون $p = 1, 2, 3$

يعني :

$$\psi(r, \theta, \phi) = \left[\frac{2}{\Gamma(l + \frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{h} \right)^{\frac{l+3}{2}} \exp \left(- \frac{m r^2}{2 h} \right) r^l Y_l^m(\theta, \phi)$$

عندما تكون $p = 0$

الباب السابع

المعالجة الرياضية التقريبية في ميكانيكا الكم
نظرية الاقلاق أو الاضطراب

MATHEMATICAL APROXIMATION METHODS IN QUANTUM ME-
CHANICS
(PERTURBATION THEORY)

الباب السابع

المعالجة الرياضية التقريبية في ميكانيكا الكم
نظرية الاقلاق أو الاضطراب

MATHEMATICAL APROXIMATION METHODS IN QUANTUM ME-
CHANICS
(PERTURBATION THEORY)

يقابلنا في ميكانيكا الكم عدد قليل للغاية من السائل الفيزيائية التي يمكن معالجتها
معالجة رياضية دون أي تقريب بينما معظم السائل الاخرى تكون اكثر تعقيدا لدرجة
انه من المستحيل معالجتها دون تقريب ولذلك فانه من المعتاد ان تتم مثل هذه
المعالجات في اطار طرق تقريبية من أهمها ما يسمى بطرق الاقلاق .

ويُقصد بالاقلاق هو ان تتميز المجموعة الفيزيائية لمؤثرات (عوامل الاقلاق) ينتج
عنها ان تتغير المستويات الذاتية الاصلية (مستويات ما قبل الاقلاق) Unperturbed
الى مستويات ذاتية أخرى تسمى مستويات ما بعد الاقلاق — Perturbed — وهذه
يقابلها ما يسمى بالموال الذاتية الناتجة عن عملية الاقلاق (Perturbed
Eigenfunctions) . مثال ذلك :

- ١ — تعرض مجموعة ذرات لمادة ما لمجالات كهرومغناطيسية .
- ٢ — استطارة حزمة من الجسيمات الأولية تحت تأثير المجال النووي لانوية ذرات المادة
التي تخترقها تلك الجسيمات .
- ٣ — انبعاث اصعاطات الميزر والليزر تحت ظروف محددة .

وطريقة الاقلاق تعتمد اساسا على اعتبار ان المعاملة الهاملتونية \hat{H} للمجموعة
الفيزيائية ربح تحت تأثير عامل الاقلاق (الاضطراب) مكونة من جزئين اولهما \hat{H}_0

يتأهل الحالة الهاميلتونية للمجموعة التيزيائية في حالة غياب طاقم الاطلاق وتأتيها \hat{H}_0 ويتعرض فيه دائما أنه يمثل جزءا صغيرا بالنسبة للحالة \hat{H}_0 وفي ضوء ذلك يمكن كتابة معادلة شرودنجر للمجموعة التيزيائية التي تعرضت للاطلاق على الصورة الآتية :

$$\hat{H} \psi_n = E_n \psi_n \quad (7.1)$$

مع مراعاة الشروط الحدية المعتادة * حيث :

$$\hat{H} = \hat{H}(0) + \hat{H}' \quad (7.2)$$

وفي المقابل :

$$\psi_n = \psi_n^{(0)} + \psi_n' \quad (7.3)$$

حيث $\psi_n^{(0)}$ و ψ_n' معياريتين * مع ملاحظة أن :

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n' \quad (7.4)$$

وأن $E_n^{(0)}$ و $\psi_n^{(0)}$ التغيرات الاطلاقية في كل من E_n و ψ_n نتيجة تأثير \hat{H}' .
علاوة على ذلك يمكننا كل من مستويات الطاقة والدوال على الصورة ψ_n و E_n فان ذلك سببه انها تتأهل احداها الاخرى بمعنى أن $\psi_n^{(0)}$ هي الحالة التي تتأهل بها ψ_n في حالة تلافى طاقة الاطلاق تدريجيا *

وتعتمد الطريقة العامة للمعالجة التقريبية التي نحن بصدد هنا بأنه يعبر عن كل من الدوال ψ_n والمستويات E_n على صورة سلسلة بدلالة قوى لمعامل λ اختياري حقيقي يرمز له في المادة بالرمز λ وقيته اصغر من الواحد الصحيح ويحذف من المعادلة الآتية :

$$\hat{H}' = \lambda \hat{H}'(1) + \lambda^2 \hat{H}'(2) + \lambda^3 \hat{H}'(3) + \dots \quad (7.5)$$

تأخذ التسلسلة الخاصة بالدوال ψ_n ، الخاصة بالمستويات E_n الصور التالية :

$$\psi_n = \psi_n^{(0)} + \lambda \psi_n^{(1)} + \lambda^2 \psi_n^{(2)} + \dots \quad (7.6)$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \quad (7.7)$$

وحيث ان المعامل الاختياري λ المختوف فيه ان قيمته صغيرة لدرجة
اعتبار $\lambda \hat{H}^{(1)}$ صغيرة جداً بالنسبة للمعاطة \hat{H}_0 فانه يمكن في معادلة (7.5)
بالحد الاول نقط اي نضع :

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \lambda \hat{H}^{(1)} \quad (7.8)$$

وعلى ذلك فانه بالتمويض من المعادلات (7.6) و (7.7) في
المعادلة (7.1) :

$$(\hat{H}^{(0)} + \lambda \hat{H}^{(1)}) (\psi_n^{(0)} + \lambda \psi_n^{(1)} + \lambda^2 \psi_n^{(2)} + \dots)$$

$$= (E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots) (\psi_n^{(0)} + \lambda \psi_n^{(1)} + \lambda^2 \psi_n^{(2)} + \dots) \quad (7.9)$$

$$\therefore \hat{H}^{(0)} \psi_n^{(0)} + \lambda \hat{H}^{(0)} \psi_n^{(1)} + \lambda^2 \hat{H}^{(0)} \psi_n^{(2)} + \dots$$

$$+ \lambda \hat{H}^{(1)} \psi_n^{(0)} + \lambda^2 \hat{H}^{(1)} \psi_n^{(1)} + \lambda^3 \hat{H}^{(1)} \psi_n^{(2)} + \dots$$

$$= E_n^{(0)} \psi_n^{(0)} + \lambda E_n^{(0)} \psi_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(0)} \psi_n^{(2)} + \dots$$

$$+ \lambda E_n^{(1)} \psi_n^{(0)} + \lambda^2 E_n^{(1)} \psi_n^{(1)} + \lambda^3 E_n^{(1)} \psi_n^{(2)} + \dots$$

$$+ \lambda^2 E_n^{(2)} \psi_n^{(0)} + \lambda^3 E_n^{(2)} \psi_n^{(1)} + \dots$$

$$= 0 \quad (7.10)$$

ولكى تكون هذه المعادلة صحيحة يجب ان يمازى كل من معاملات القوى المختلفة للمعامل λ كل على حدة المقدار صفر . أى ان :

$$\hat{H}(0) \psi_n(0) - E_n(0) \psi_n(0) = 0 \quad (7.11)$$

$$\hat{H}(0) \psi_n(1) + \hat{H}(1) \psi_n(0) - E_n(0) \psi_n(1) - E_n(1) \psi_n(0) = 0 \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}(0) \psi_n(2) + \hat{H}(1) \psi_n(1) - E_n(0) \psi_n(2) - E_n(1) \psi_n(1) \\ - E_n(2) \psi_n(0) = 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

..... الخ

ونلاحظ ان المعادلة الاولى تتعلق بالمجموعة التيزائية قبل ان تتعرض لمعامل الاقلاق وهى محقة تلقائيا .

أما المعادلة الثانية (7.12) فان حلها يودى الى تعيين قيمة $E_n(1)$ وهو يمثل التصحيح ذى الرتبة الاولى (First-order correction) الذى يجب ان يضاف الى القيمة $E_n(0)$ الخاصة بطاقة المجموعة التيزائية قبل الاقلاق .

وبالمثل فان المعادلة الثالثة (7.13) يودى حلها الى تعيين $E_n(2)$ وهو ما يسمى بالتصحيح ذى الرتبة الثانية (Second-order correction) وهكذا .

تعيين التصحيح ذى الرتبة الاولى فى اطار نظرية الاقلاق التى لا تعتمد على الزمن :

أولاً :

لايجاد $E_n(1)$ نبدأ بالمعادلة (7.12) على الصورة الاتية :

$$(\hat{H}(0) - E_n(0)) \psi_n(1) = (E_n(1) - \hat{H}(1)) \psi_n(0) \quad (7.14)$$

لحل المعادلة (7.14) نعبر عن الدالة $\psi_n^{(1)}$ على صورة متسلسلة كما يلي :

$$\psi_n^{(1)} = \sum_m a_m^{(1)} \psi_m^{(0)} \quad (7.15)$$

حيث $a_m^{(1)}$ هي معاملات غير معلومة ويتمن علينا تعيينها والدليل العكسوى يعبر عن مالتجنا للمجموعة التيزائية في إطار نظرية الاقلاق ذات الرتبة الاولى .

وبالتعويض من المعادلة (7.15) في المعادلة (7.14) نحصل على :

$$(\hat{H}^{(0)} - E_n^{(0)}) \sum_m a_m^{(1)} \psi_m^{(0)} = (E_n^{(1)} - \hat{H}^{(1)}) \psi_n^{(0)} \quad (7.16)$$

$$\therefore \sum_m a_m^{(1)} (\hat{H}^{(0)} - E_n^{(0)}) \psi_m^{(0)} = (E_n^{(1)} - \hat{H}^{(1)}) \psi_n^{(0)} \quad (7.17)$$

$$\therefore \sum_m a_m^{(1)} (E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) \psi_m^{(0)} = (E_n^{(1)} - \hat{H}^{(1)}) \psi_n^{(0)} \quad (7.18)$$

ونضرب المعادلة (7.18) من اليسار في الدالة $\psi_n^{(0)*}$ واجرا التكامل نحصل على :

$$\begin{aligned} \sum_m a_m^{(1)} (E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) \int \psi_n^{(0)*} \psi_m^{(0)} d\tau \\ = E_n^{(1)} \int \psi_n^{(0)*} \psi_n^{(0)} d\tau - \int \psi_n^{(0)*} \hat{H}^{(1)} \psi_n^{(0)} d\tau \end{aligned} \quad (7.19)$$

وحيث ان التكامل في الطرف الايمن من المعادلة (7.19) يساوى صفرا لجميع قيم m فيما عدا القيمة $m = n$ وفي هذه الحالة فان القوس : $(E_m^{(0)} - E_n^{(0)})$ يتلاشى . وهذا معناه ان الطرف الايمن للمعادلة (7.19) يساوى صفرا بينما في الطرف الايمن فان التكامل الاول يساوى واحد صحيح وعلى ذلك نحصل على :

$$\therefore 0 = E_n^{(1)} - \int \psi_n^{(0)*} H^{(1)} \psi_n^{(0)} d\tau$$

$$\therefore E_n^{(1)} = \int \psi_n^{(0)*} H^{(1)} \psi_n^{(0)} d\tau = H_{nn}^{(1)} \quad (7.20)$$

أي أن التصحيح الأول للطاقة عبارة عن القيمة المتوقعة للحد الأول من حدود الاقلاق في الحالة الهاميلتونية \hat{H} .

والقدر $\hat{H}_{nn}^{(1)}$ يسمى بعنصر الصفوة الخامس الحالة الهاميلتونية للاقلاق.

مثال (٧-١)

استعمل بالمعادلة (7.18) وهي :

$$\sum_m a_m^{(1)} (E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) \psi_m^{(0)} = E_n^{(1)} \psi_n^{(0)} - \hat{H} \psi_n^{(0)}$$

استنتج علاقة عامة تعطي قيمة المعاملات $a_m^{(1)}$ لأي قيمة للدليل m .

الحل :

لنبدأ بضرب المعادلة المعطاة في الدالة $(\psi_j^{(0)})^*$ من جهة اليسار ونجرب عملية التكامل كالمعتاد :

$$\begin{aligned} \sum_m a_m^{(1)} (E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) \int (\psi_j^{(0)*} \psi_m^{(0)}) d\tau \\ = E_n^{(1)} \int (\psi_j^{(0)*} \psi_n^{(0)}) d\tau - \int (\psi_j^{(0)*} \hat{H} \psi_n^{(0)}) d\tau \\ \therefore \sum_m a_m^{(1)} (E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) \delta_{jm} = E_n^{(1)} \delta_{jn} - H'_{jn} \quad (1) \end{aligned}$$

عندما يكون $n = j$ فان المعادلة (١) تأخذ الصورة التالية :

$$a_j^{(1)} (E_j^{(0)} - E_n^{(0)}) = - H_{jn}^* \quad (11)$$

$$\therefore a_j^{(1)} = \frac{H_{jn}^*}{(E_n^{(0)} - E_j^{(0)})} \quad (111)$$

المعادلة (111) تعطى جميع قيم المعاملات $a_j^{(1)}$ ماعدا المعامل $a_n^{(1)}$ أى المعامل الذى فيه $j = n$ وهذه الحالة الخاصة يمكننا حلها كما على :
نعلم أن الدالة ψ_n يجب ان تحقق شرط الممايرة ويمكن كتابته على الصورة التالية :

$$\int \psi_n^* \psi_n d\tau = \langle \psi_n, \psi_n \rangle = 1 \quad (12)$$

وبحيث ان الدالة ψ_n يمكن كتابتها على الصورة (راجع معادلة "7.15") :

$$\psi_n = \psi_n^{(0)} + \lambda \psi_n^{(1)} + \lambda^2 \psi_n^{(2)}$$

$$\psi_n^{(1)} = \sum_m a_m^{(1)} \psi_m^{(0)} \quad \text{بينما}$$

$$\therefore \psi_n = \psi_n^{(0)} + \lambda \left[a_n^{(1)} \psi_n^{(0)} + \sum_{(m \neq n)} \frac{H_{mn}^*}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)} \right] \quad (13)$$

والتمهيد من (13) نرى (12) نحصل على (مكتشفين بالتقريب ذى الرتبة الاولى)

$$1 = \langle \psi_n^{(0)} + \lambda \psi_n^{(1)}, \psi_n^{(0)} + \lambda \psi_n^{(1)} \rangle$$

$$1 = \int \psi_n^{(0)*} \psi_n^{(0)} d\tau + \lambda \left[\int \psi_n^{(1)*} \psi_n^{(0)} d\tau + \int \psi_n^{(0)*} \psi_n^{(1)} d\tau \right] + 0$$

$$\therefore 1 = 1 + \lambda \left[\int (\psi_n^{(1)})^* \psi_n^{(0)} d\tau + \int (\psi_n^{(0)})^* \psi_n^{(1)} d\tau \right] = 0$$

$$\therefore \left[\int (\psi_n^{(1)})^* \psi_n^{(0)} d\tau + \int (\psi_n^{(0)})^* \psi_n^{(1)} d\tau \right] = 0$$

$$\therefore \sum_m a_n^{(1)*} \int \psi_m^{(0)*} \psi_n^{(0)} d\tau + \sum_m a_m^{(1)} \int \psi_n^{(0)*} \psi_m^{(0)} d\tau$$

$$\therefore (a_n^{(1)})^* + a_n^{(1)} = 0 \quad (v11)$$

$$a_n^{(1)} = A + iB$$

وضع المعامل

نجد ان المعادلة (v11) تؤدي الى أن :

$$(A - iB) + (A + iB) = 0$$

$$2A = 0$$

$$\therefore a_n^{(1)} = iB \quad \text{أي ان المعامل } a_n \text{ عبارة عن كمية تخيلية} :$$

وضع هذه النتيجة في معادلة رقم (7.5) نحصل على :

$$\psi_n = \psi_n^{(0)} + iB \lambda \psi_n^{(0)} + \lambda \sum_{m \neq n} \frac{H_{mn}^{(1)}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)}$$

$$\psi_n = (1 + iB \lambda) \psi_n^{(0)} + \lambda \sum_{m \neq n} \frac{H_{mn}^{(1)}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)}$$

$$\int \psi_n^* \psi_n d\tau = \int |(1 + iB)|^2 \psi_n^{(0)*} \psi_n^{(0)} d\tau + \dots$$

$$\therefore 1 = 1 + B^2 \lambda^2$$

$$\therefore B^2 \lambda^2 = 0$$

هنا λ^2 لا تساوى صفرا

$$\therefore B = 0$$

$$\therefore a_n^{(1)} = 0$$

وهو المطلوب في المثال الحالي كطاقة خاصة عندما يكون $j = n$ في المعادلة (111) *

ثانيا : تعيين التصحيح ذي الرتبة الثانية في اطار نظرية الاقلاق التي لا تعتمد على الزمن :

(Time Independent Second-Order Perturbation Correction)

في المعادلة (7.13) وهي :

$$\hat{H}^{(0)} \psi_n^{(2)} + \hat{H}^{(1)} \psi_n^{(1)} = E_n^{(0)} \psi_n^{(2)} + E_n^{(1)} \psi_n^{(1)} + E_n^{(2)} \psi_n^{(0)} \quad (7.13)$$

نفعل الدوال $\psi_n^{(2)}$ بدلالة الدوال الذاتية للماملة الهاميلتونية \hat{H}_0 طبقا للصورة التي سبق استخدامها بالنسبة للدوال $\psi_n^{(1)}$ في المعادلة (7.15) أي ان :

$$\psi_n^{(2)} = \sum_m a_m^{(2)} \psi_m^{(0)} \quad (7.21)$$

والدليل المولى (2) يعبر عن حبة انا نعالج الرتبة الثانية في اطار نظرية الاقلاق *

هنا الترميم في المعادلة (7.13) عن كل من $\psi_n^{(1)}$ و $\psi_n^{(2)}$ من المعادلتين (7.15) و (7.21) على التوالي نحصل على :

$$\begin{aligned} & \sum_m a_m^{(2)} \hat{H}^{(0)} \psi_m^{(0)} + \hat{H}^{(1)} \sum_m a_m^{(1)} \psi_m^{(0)} \\ & = E_n^{(0)} \sum_m a_m^{(2)} \psi_m^{(0)} + E_n^{(1)} \sum_m a_m^{(1)} \psi_m^{(0)} + E_n^{(2)} \psi_n^{(0)} \dots \end{aligned}$$

ونضرب هذه المعادلة من جهة اليمين في $(\psi_k^{(0)})^*$ واجزاء التكامل كالمعتاد
نحصل على :

$$\begin{aligned} & \sum_m a_m^{(2)} \int (\psi_k^{(0)})^* \hat{H}^{(0)} \psi_m^{(0)} d\tau + \sum_m a_m^{(1)} \int (\psi_k^{(0)})^* \hat{H}^{(1)} \psi_m^{(0)} d\tau \\ & = E_n^{(0)} \sum_m a_m^{(2)} \int (\psi_k^{(0)})^* \psi_m^{(0)} d\tau \\ & + E_n^{(1)} \sum_m a_m^{(1)} \int (\psi_k^{(0)})^* \psi_m^{(0)} d\tau \\ & + E_n^{(2)} \int (\psi_k^{(0)})^* \psi_n^{(0)} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_m a_m^{(2)} E_m^{(2)} \delta_{km} + \sum_m a_m^{(1)} \\ = E_n^{(0)} \sum_m a_m^{(2)} \delta_{km} + \hat{H}_{kn}^{(1)} \sum_m a_m^{(1)} \delta_{km} + E_n^{(2)} \delta_{kn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_k^{(2)} E_k^{(0)} + \sum_m a_m^{(1)} \hat{H}_{km}^{(1)} \\ = E_n^{(0)} a_k^{(2)} + \hat{H}_{kn}^{(1)} a_k^{(1)} + E_n^{(2)} \delta_{kn} \end{aligned}$$

$$\therefore a_k^{(2)} (E_k^{(0)} - E_n^{(0)}) + E_n^{(2)} \delta_{kn}$$

$$= \sum_m a_m^{(1)} \hat{H}_{km}^{(1)} - a_k^{(1)} \hat{H}_{nn}^{(1)} \quad (7.22)$$

وحدا تكون $n = k$ كان :

$$\therefore 0 + E_n^{(2)} = \sum_m a_n^{(1)} H_{nm}^v - a_n^{(1)} H_{nn}^v$$

وبحيث ان العامل $a_n^{(1)}$ يساوى صفرا (راجع صفحة 117)

$$\therefore E_n^{(2)} = \sum_m a_n^{(1)} H_{nm}^v \quad (7.23)$$

$$\left[H_{nm}^v / (E_n^{(0)} - E_m^{(0)}) \right] \quad \text{حيث ان } a_n^{(1)} \text{ تساوى}$$

$$\therefore E_n^{(2)} = \sum_{(m \neq n)} \frac{H_{nm}^v H_{nm}^v}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \quad \text{حيث ان : } H_{nm}^v = (H_{nm}^v)$$

$$\therefore E_n^{(2)} = \sum_{(m \neq n)} \frac{H_{nm}^v{}^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \quad (7.24)$$

وهذا يعطى التصحيح ذو الرتبة الثانية فيما نظرية الاطلاق التي لا تعتمد على مدى الزمن بالنسبة للقيم الذاتية للطاقة . وتوجد ان تغير هذا الى انه في حالة عدم تساوى $n = k$ أي أن $k \neq n$ فان المعادلة (7.22) تقول الى الصورة التالية :

$$a_k^{(2)} (E_n^{(0)} - E_k^{(0)}) = \sum_m a_n^{(1)} H_{km}^v - a_k^{(1)} H_{nm}^v \quad (7.25)$$

$$\therefore a_k^{(2)} = \sum_{(m \neq n)} \frac{H_{nm}^v H_{km}^v}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} - \frac{H_{kn}^v H_{nn}^v}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})^2} \quad (7.26)$$

degeneracy تأثيرية الاقلاق ذي الرتبة الاولى في حالة وجود اضمحلال

(انتقاء متعدد) :

لتبسيط المسألة التي نحن بمقدورها لنعتبر ان المجموعة الفيزيائية تتصف بحالة ميكانيكية كمية تناظرية الانتقاء بمعنى ان هناك دالتين $\psi_1^{(0)}$ ، $\psi_2^{(0)}$ تتجهان لمستوى طاقة مشترك $E^{(0)}$.

أي ان :

$$H^{(0)} \psi_1^{(0)} = E^{(0)} \psi_1^{(0)} \quad (1)$$

$$H^{(0)} \psi_2^{(0)} = E^{(0)} \psi_2^{(0)}$$

وعليه فان الجمع الخطي لهاتين الدالتين $C_1 \psi_1^{(0)} + C_2 \psi_2^{(0)}$ يمثل ايضا حالة كمية تنتمي لنفس مستوى الطاقة المشتركة $E^{(0)}$ اي ان :

$$\psi^{(0)} = C_1 \psi_1^{(0)} + C_2 \psi_2^{(0)} \quad (3)$$

$$H^{(0)} (C_1 \psi_1^{(0)} + C_2 \psi_2^{(0)}) = E^{(0)} (C_1 \psi_1^{(0)} + C_2 \psi_2^{(0)}) \quad (4)$$

ونفترض الان ان تلك المجموعة الفيزيائية تنتم الى اقلاق صغير H' وعليه كما سبق تكون الحالة الهاميلتونية هي $(\hat{H}^{(0)} + \hat{H}')$ وتكون الدالة الناتجة هي عبارة عن $\psi^{(1)} + \psi^{(0)}$ والتي يفترض فيها انها تختلف اختلافا بسيطا عن $\psi^{(0)}$ وعليه تأخذ معادلة شرودنجر الصورة التالية :

$$(\hat{H}^{(0)} + \hat{H}')(\psi^{(0)} + \psi^{(1)}) = (E^{(0)} + E^{(1)})(\psi^{(0)} + \psi^{(1)}) \quad (5)$$

وبإهمال الكميتين الصغيرتين $\psi^{(1)}$ و $\psi^{(1)}$ نجد ان :

$$(\hat{H}^{(0)} - E^{(0)}) \psi^{(1)} + (\hat{H}^{(1)} - E^{(1)}) \psi^{(0)} = 0$$

وبالتعويض عن $\psi^{(0)}$ من المعادلة الاولى نحصل على :

$$(\hat{H}^{(0)} - E^{(0)}) \psi^{(1)} + (H^{(1)} - E^{(1)})(c_1 \psi_1^{(0)} + c_2 \psi_2^{(0)}) = 0 \quad (6)$$

ويضرب هذه المعادلة في $\psi_1^{(0)*}$ من جهة اليسار ثم اجزاء التكامل نحصل على :

$$\begin{aligned} & \int \psi_1^{(0)*} H^{(0)} \psi^{(1)} d\tau - \int \psi_1^{(0)*} E^{(0)} \psi^{(1)} d\tau \\ & + \int \psi_1^{(0)*} H^{(1)} c_1 \psi_1^{(0)} d\tau - \int \psi_1^{(0)*} E^{(1)} c_1 \psi_1^{(0)} d\tau \\ & + \int \psi_1^{(0)*} H^{(1)} c_2 \psi_2^{(0)} d\tau - \int \psi_1^{(0)*} E^{(1)} c_2 \psi_2^{(0)} d\tau = 0 \\ & \therefore 0 - 0 + \int \psi_1^{(0)*} H^{(1)} c_1 \psi_1^{(0)} d\tau - \int \psi_1^{(0)*} E^{(1)} c_1 \psi_1^{(0)} d\tau \\ & + \int \psi_1^{(0)*} H^{(1)} c_2 \psi_2^{(0)} d\tau - 0 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

وباستخدام الاختصار التالي

$$\int \psi_1^{(0)*} H^{(1)} \psi_2^{(0)} d\tau = W_{12}$$

$$\therefore 0 + 0 + c_1 W_{11} - c_1 E^{(1)} + c_2 W_{12} - 0 = 0$$

$$\therefore (W_{11} - E^{(1)}) C_1 + W_{12} C_2 = 0 \quad (8)$$

وبالمثل بضرب نفس المعادلة في $\psi_2^{(0)*}$ من اليسار ثم إجراء التكامل أيضا نحصل على :

$$\begin{aligned} & \int \psi_2^{(0)*} H^{(0)} \psi^{(1)} d\tau - \int \psi_2^{(0)*} E^{(0)} \psi^{(1)} d\tau \\ & + \int \psi_2^{(0)*} H^{(1)} C_1 \psi_1^{(0)} d\tau - \int \psi_2^{(0)*} E^{(1)} C_1 \psi_1^{(0)} d\tau \\ & + \int \psi_2^{(0)*} H^{(1)} C_2 \psi_2^{(0)} d\tau - \int \psi_2^{(0)*} E^{(1)} C_2 \psi_2^{(0)} d\tau = 0 \end{aligned}$$

(9)

$$\therefore W_{21} C_1 + W_{22} C_2 - E^{(1)} C_2 = 0$$

$$\therefore W_{21} C_1 + (W_{22} - E^{(1)}) C_2 = 0 \quad (10)$$

وهاتان المعادلتان (8) و (10) تتحققان في نفس الوقت فقط إذا كانت المحددة الخاصة بمعاملات حدودهما تساوي صفراً أي أن :

$$\begin{vmatrix} W_{11} - E^{(1)} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} - E^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

أي أن :

$$(W_{11} - E^{(1)}) (W_{22} - E^{(1)}) - W_{12}W_{21} = 0$$

$$\therefore W_{11}W_{22} - E^{(1)} W_{11} - E^{(1)} W_{22} + [E^{(1)}]^2 - W_{12}W_{21} = 0$$

ومع ملاحظة أن

$$W_{12} = W_{21}^*$$

أي

$$W_{12}W_{21} = |W_{12}|^2$$

$$\therefore [E^{(1)}]^2 - (W_{11} + W_{22}) E^{(1)} + (W_{11}W_{22} - |W_{12}|^2) = 0$$

$$\therefore E^{(1)} = \frac{(W_{11} + W_{22}) \pm \sqrt{(W_{11} + W_{22})^2 - 4(W_{11}W_{22} - |W_{12}|^2)}}{2}$$

$$\therefore E^{(1)} = \frac{1}{2} \left\{ W_{11} + W_{22} \pm \left[(W_{11} - W_{22})^2 + 4 |W_{12}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (11)$$

وبحيث أن الظروف الفيزيائية في المعتاد لا تؤدي إلى احتمال أن $W_{11} = W_{22}$ وفي نفس الوقت مساواة W_{12} بالصفر فهذا معناه أن حالة الكم للجيوقة الفيزيائية تحت تأثير عامل الاقلاق تنقسم إلى حالتين الأولى كانت عليها من نتائج الالتصاق إلى مستوى طاقة مشترك $E^{(0)}$ وتؤدي إلى ظهور حالتين كميتين مختلفتين أحدهما تعكس

$$\left\{ \begin{array}{l} E^{(0)} + E^{(1)} \\ E^{(0)} - E^{(1)} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{الاشارة (+) اى تنتمى الى مستوى طاقة} \\ \text{والاخرى تناقبل الاشارة (-) اى تنتمى الى مستوى طاقة} \end{array}$$

وتعتبر هذه النتيجة واحدة من اهم المظاهر المهمة لميكانيكا الكم عن الميكانيكا الكلاسيكية " النيوتونية " (هذه النتيجة مثلا هى التى ادت الى فهم الكثير من الخصائص الكهربائية للمواد العازلة والوصلة وال شبه موصلة وبالتالي ادت الى اكتشاف الترانزستور) *

شال (٧ - ٧) :

وضع انه في حالة كون القيمة المتوقعة للعلاقة $\hat{R}^{(1)}$ غير سالبة فسان W_{12} يحقق النتيجة التالية :

$$|W_{12}|^2 \leq W_{11} W_{22}$$

الحل :

بما ان $E^{(1)}$ هي القيمة المتوقعة للعلاقة $\hat{R}^{(1)}$ في حالة كمية معينة فمعنى ذلك ان تلك القيمة يجب ان تكون موجبة . وأخذ القيمة الصغرى لها وهى :

$$E^{(1)} = \frac{1}{2} \left\{ W_{11} + W_{22} - \left[(W_{11} - W_{22})^2 + 4 |W_{12}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$\therefore W_{11} + W_{22} - \left[(W_{11} - W_{22})^2 + 4 |W_{12}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$\therefore (W_{11} + W_{22})^2 \geq (W_{11} - W_{22})^2 + 4 |W_{12}|^2$$

$$\therefore W_{11}^2 + W_{22}^2 + 2 W_{11} W_{22} \geq W_{11}^2 + W_{22}^2 - 2 W_{11} W_{22} + 4 |W_{12}|^2$$

$$\therefore 4 |W_{11} W_{22}| \geq 4 |W_{12}|^2$$

$$\therefore |W_{12}|^2 \leq W_{11} W_{22}$$

ملحوظة (١) :

نتيجة مباشرة لهذه الحقيقة هو ان في هذه الحالة يكون :

$$0 \leq E^{(1)} \leq W_{11} + W_{22}$$

ملحوظة (١) :

إذا كان \hat{T} عامل هيرميتي متبادل مع $\hat{H}(1)$ ، والدالتين $\psi_1(0)$ ، $\psi_2(0)$ هما دالتين ذاتيتين للعامل \hat{T} ، نتيجان لقيمتين ذاتيتين t_1 ، t_2 فان $\psi_{12} = 0$. والبرهان على ذلك يمكن تبينه كما يلي :

بما ان \hat{T} ، $\hat{H}(1)$ متبادلان إذا

$$[\hat{T}, \hat{H}(1)] = 0$$

$$\therefore \hat{H}(1) \hat{T} = \hat{T} \hat{H}(1)$$

$$\therefore \int \psi_1(0)^* (\hat{H}(1) - \hat{T} \hat{H}(1) \hat{T}) \psi_2(0) d\tau = 0$$

وبما ان \hat{T} هيرميتي ومراقة أن :

$$\therefore \hat{T}^* \psi_1(0) = t_1 \psi_1(0)^* , \quad \hat{T} \psi_2(0) = t_2 \psi_2(0)^*$$

$$\therefore (t_1 - t_2) \psi_{12} = 0 \quad \therefore \psi_{12} = 0$$

لأن t_1 لا تساوي t_2

مثال (٢-٢) :

افترض متذبذبات توافق بسيط كتلة m وطول القفلة k وان نفس الحالة
الادنى بمطاقة

$$E_0(0) = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ولنفرض الآن انخذذب تناوئى بسيط آخر أضعف بجوار التذبذب التناوئى البسيط
الاعلى المطلوب حسابية الزيادة فى طاقته للحالة الأدنى من جراء ذلك .

الحل :

لحاطة حل هذه المسألة بطريقة الاقلاق نستخدم معادلة :

$$E_n^{(1)} = \langle \hat{H}^{(1)} \rangle_n^{(0)}$$

مع ملاحظة ان $\hat{H}^{(1)}$ هنا تقابل طاقة الوضع للتذبذب التناوئى البسيط الذى اضعف
أى ان : (مع فرض ان ثابت القوة له يماوى b) :

$$\hat{H}^{(1)} = \frac{1}{2} b x^2$$

وباستخدام دالة العوجة الخاصة بالطالة الارضية فان :

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= \langle H^{(1)} \rangle_0^{(0)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{m \omega_0}{\hbar}} \cdot b \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{m \omega_0 x^2}{\hbar}} dx \\ &= \frac{\hbar b}{4 m \omega_0} \end{aligned}$$

وعلى ذلك فى حدود التقريب الذى المرتبة الاولى يكون :

$$E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)}$$

$$\therefore E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 + \frac{1}{4} \frac{\hbar b}{m \omega_0}$$

مثال (٧-٤) :

ضع ان في مثال (٧-٣) يمكننا الوصول الى نفس النتيجة دون اللجوء الى طريقة الاقلاق وذلك بإعادة الثابت b للجذب الثاني الى ثابت الجذب الاول k أى بتغيير k الى $k + b$.

الحل :

حيث ان الثابت الجديد للجذب فى هذه الحالة هو $k + b$ فان التردد الزاوى له هو :

$$w = \sqrt{\frac{k+b}{m}}$$

وبنى نري ان $|b|$ اقل من k

$$\therefore w = \left[\frac{k+b}{m} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \left[1 + \frac{b}{k} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \left[1 + \frac{b}{2k} - \frac{b^2}{8k^2} + \dots \right]$$

وحيث ان $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ * $k = mw_0^2$ اذا طالة الحالة الارضية للجذب تأخذ القيمة :

$$E_0 = \frac{1}{2} m w = \frac{1}{2} m w_0 \left[1 + \frac{b}{2mw_0^2} - \frac{b^2}{8m^2w_0^4} + \dots \right]$$

ونلاحظ ماعرة ان الحدين الاولين هما في الحقيقة نفس النتيجة في الحل السابق اعلاه . ونود هنا ان نضيف مايلي :

ملحوظة (١) :

من الثالين السابقين يمكننا تبين ان الحدود المتناهية في نظرية الاطلاق نفس ميكانيكا الكم هي مفكوك التسلسلة الخاصة بالطاقة الفعلية بدلالة المعامل الصغير "b" مرفوعا لقوى متناهية .

ملحوظة (٢) :

اذا حدث ان كان b اكبر من k فان التسلسلة لا تنتهي (اي تنفرد) وذلك لأن b سالبة وان |b| اكبر من k فان طاقة الوضع تصبح سالبة وبالتالي فان القوة المحملة تكون قوة طرد وليست بقوة جذب وعليه لا يكون هناك حالة مترابطة على الإطلاق .

مثال (٧ - ٥) :

اذا كانت دالة الهاميلتونيان لتذبذب غير توافقي على الصورة الاتية :

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 + ax^4 \quad (1)$$

فأوجد مستوى الطاقة الارض له باستخدام نظرية الاطلاق ذي الرتبة الاولى . علما بأن دالة الحالة للمستوى الارضي للتذبذب التوافقي تكتب على الصورة

$$\psi_0(x) = \left(\frac{k}{\pi \hbar \omega}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{kx^2}{2\hbar \omega}\right)$$

الحل :

معادلة المادة (١) معادلة هاميلتونية للتذبذب التوافقي التي تكتب على

الصورة

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \quad (11)$$

يمكننا اختيار الحد (ax^4) يمثل الاطلاق H^0 وعليه لان التصحيح للمعادلة
ذى الرتبة الاولى نهما لنضية الاطلاق هو

$$\begin{aligned} E_0^1 &= H^1_{00} = (\psi_0, H^1 \psi_0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^* H^1 \psi_0 dx \\ &= \left(\frac{k}{\pi \hbar w}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} ax^4 \exp\left(-\frac{kx^2}{\hbar w}\right) dx \\ &= \left(\frac{k}{\pi \hbar w}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\pi \hbar w}{2k}\right) \cdot a \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d\left[\exp\left(-\frac{kx^2}{\hbar w}\right)\right] \\ &= \left(\frac{k}{\pi \hbar w}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot \left(-\frac{\hbar w}{2k}\right) \left\{ \left[x^3 \cdot \exp\left(-\frac{kx^2}{\hbar w}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 \cdot \exp\left(-\frac{kx^2}{\hbar w}\right) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\pi \hbar w}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a \hbar w}{k}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{kx^2}{\hbar w}\right) x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E'_0 &= \frac{3}{2} \left(\frac{k}{\pi \hbar \omega} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{k} \right) \left(-\frac{\hbar \omega}{2k} \right) \int_{-\infty}^{\infty} x \, d \exp \left[\left(-\frac{kx^2}{\hbar \omega} \right) \right] \\
 &= 0 + \frac{3a}{4} \left(\frac{k}{\pi \hbar \omega} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\hbar \omega}{k} \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{kx^2}{\hbar \omega} \right) dx \\
 &= \frac{3a}{4} \left(\frac{k}{\pi \hbar \omega} \right)^{1/2} \left(\frac{\hbar \omega}{k} \right)^2 \left(\frac{\hbar \omega}{k} \right)^{1/2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\left(\sqrt{\frac{k}{\hbar \omega}} x \right) d \left(\sqrt{\frac{k}{\hbar \omega}} x \right) \right\} \\
 &= \frac{3a}{4} \left(\frac{k}{\pi \hbar \omega} \right)^{1/2} \left(\frac{\hbar \omega}{k} \right)^2 \left(\frac{\hbar \omega}{k} \right)^{1/2} \left\{ \sqrt{\pi} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\therefore E'_0 = \frac{3a}{4} \left(\frac{\hbar \omega}{k} \right)^2$$

تذييل رقم (١)

قيم بعض الثوابت الفيزيائية :

1. سرعة الضوء $= c = 2.998 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
2. شحنة الإلكترون $= e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ coulomb}$
3. ثابت بلانك $= h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s.}$
4. النسبة بين الشحنة للكتلة للإلكترون $= \frac{e}{m_e} = 1.759 \times 10^{11} \text{ coul./kg}$
5. الكتلة الساكنة للإلكترون $= m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg} = 0.511 \text{ Mev.}$
6. الطول الموجي الكوموتي للإلكترون $= \frac{h}{m_e c} = 2.426 \times 10^{-12} \text{ m}$
7. الكتلة الساكنة للبروتون $= 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938.3 \text{ Mev.}$
8. الطول الموجي الكوموتي للبروتون $= \frac{h}{m_p c} = 1.321 \times 10^{-15} \text{ m}$
9. الكتلة الساكنة للنيوترون $= m_n = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 939.6 \text{ Mev.}$
10. ثابت روليفمان $= k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$
11. ثابت بلانك $= \frac{h}{2\pi} = \hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J.s}$

12. عدد اتجاده $= N_A = 6.023 \times 10^{23} \quad \text{mole}^{-1}$
13. الثابت الأول للاعماج $= G_1 = 2 \pi h c^2 = 3.741 \times 10^{-16} \quad \text{W.m}^2$
14. الثابت الثاني للاعماج $= G_2 = \frac{hc}{k} = 1.439 \times 10^{-2} \quad \text{m.}^\circ\text{K}$
15. ثابت ستيفان بولتزمان $= \sigma = 5.670 \times 10^{-8} \quad \text{W.m}^{-2}.\text{}^\circ\text{K}^{-4}$
16. ثابت رينولدز $= R_{\infty} = 1.097 \times 10^7 \quad \text{m}^{-1}$
17. ثابت التركيب الدقيق $= \alpha = \frac{1}{137}$
18. نصف قطر المدار الأول $= a_0 = 5.292 \times 10^{-11} \quad \text{m}$
في المارنظرية بومر

تقديم رقم (٢)

لمحة عن بعض العلماء الذين شاركوا عن طريق جهودهم التي اتممت بالملحوظ
العلمي الدقيق في صياغة علم ميكانيكا الكم * وسوف نمرّد ذكر هؤلاء العلماء على
التوالي تبعاً لترتيب الحرف الذي يبدأ به اسم كل عالم وليس تبعاً للتسلسل التاريخي
كما هو موضح بالباب الاول من الكتاب الحالي :

١ - ألبرت " اينشتين " (١٨٧٩ - ١٩٥٥) : **Albert EINSTEIN**

وُلد في بلدة " أُلْم " بالمانيا ودرس في معهد التكنولوجيا بزيوريخ بسويسرا
وحصل على الدبلوم في ١٩٠٠ وخلال الخمس سنوات التالية لذلك نشر ثلاث بحوث
اساسية الاول منها تناول موضوع " الانبعاث الكهروضوئي " والثاني تناول موضوع
" الحركة البراونية " اما الثالث فقد تناول موضوع جديد للغاية وهو " اساميات
النظرية النسبية الخاصة " والتي ارسيت مبادئ جديدة تماماً للفكر العلمي *

ثم عمل مديراً لمعهد الفيزياء ببرلين *

وحصل على جائزة نوبل في ١٩٢١ *

ثم هاجر في ١٩٣٣ الى امريكا وعمل استاذاً للفيزياء بمعهد الدراسات المتقدمة

بجامعة برنستون *

ويعتبر اينشتين اعظم عالم فيزياء في القرن الحالي وواحد من اكبر العلماء على

مر العصور *

٢ - نيلز هنريك "بُهر" (١٨٨٥ - ١٩٦٢) Niels Henrik BOHR

ولد بكوتنهاجن بالدانمرك ودرس بجامعة كوبنهاجن ثم ذهب الى إنجلترا لتكملة دراسته تحت اشراف العالم البريطاني "رذرفورد" للحصول على الدكتوراه من جامعة مانشستر وبعد ذلك في ١٩١٦ رجع الى كوبنهاجن ليعمل استاذاً للفيزياء النظرية بجامعة كوبنهاجن ثم انتدأ معهد "بُهر" للفيزياء النظرية في ١٩٢٤ ولا يزال هذا المعهد مركزاً دولياً يلتقى فيه اعلام البحث العلمي في مجال الفيزياء النووية وفيزياء الجسيمات الأولية واصبحت نموذجاً لعدة مراكز دولية في عديد من البلدان مثل أيرلندا وأمريكا وإيطاليا والهند .

وفي نوفمبر عام ١٩٦٢ حصل على جائزة نوبل .

ولقد أوضح بُهر بنظرياته للتركيب الذري والتركيب النووي للمادة الطبيعية للعديد من الباحثين الذين اغتفوا الكثير من المفاهيم الحديثة لتركيب المادة مشتملًا على ميكانيكا الكم وفيزياء الجسيمات وغيرها .

٣ - ماكس "بورن" (١٨٨٤ - ١٩٧٥) Max BORN

ولد في برسلو بألمانيا حيث بدأ دراسته لعلم الرياضيات ثم تابع تلك الدراسة في كل من هايدلبرج وزيورخ وجوتنجن ثم أكمل دراسته في علم الفيزياء . وعين استاذاً للفيزياء في ١٩٢٣ بجامعة جوتنجن وبقي بها حتى هاجراً لاسكتلندا ليعمل استاذاً للفيزياء بجامعة أدنبره .

وحصل على جائزة نوبل في ١٩٥٤ .

ولقد شارك بورن في تقديم العديد من اساسيات نظرية ميكانيكا الكم وهو هو الذي أول من أوضح المفهوم الاحصائي في نظرية الكم وهذا فتح الباب للتطبيقات العديدة العملية لتلك النظرية في مجال الفيزياء والكيمياء والتكنولوجيا .

٤ - لوي نيكول " دي بروي " (١٨٩٢ - ١٩٨٦)

Louis Vector De BROGLIE

ولد ببلدة ديبيلفرنسا وبدأ دراسته الجامعية باختيار علم التاريخ ثم فصل تكلية تلك الدراسة في مجال الفيزياء وحصل على درجة الدكتوراه من جامعة باريس في ١٩٢٤ ، حيث عين بعد ذلك استاذًا للفيزياء بجامعة باريس ومعهد السوربون .

وحصل على جائزة نوبل في ١٩٢٩ .

واهم اعماله خاصة بنظرية الفوتونات والتماثل بين الحركة الجسيمية المادية والحركة الموجية المصاحبة لكل مخلوق من المخلوقات . والمبررة فقط بقدرتنا على الكشف عن تلك الحركة الموجية .

٤ - بول موريس " ديراك " (١٩٠٢ - ١٩٨١)

Paul Maurice DIRAC

ولد بيوستول بانجلترا وبدأ دراسته الجامعية بعلم الهندسة الكهربائية ثم اكمل تلك الدراسة في مجال الفيزياء النظرية ثم عين في ١٩٣٢ استاذًا للرياضيات بجامعة كامبردج بانجلترا (وهو نفس العام الذي تحقق فيه تجريبيًا ولأول مرة صحة النظرية النسبية للالكترون التي كان قد نشرها في ١٩٢٨) ، وبهذا فتح الباب امام المفهوم الشامل لمعنى الجسيمات الأولية المضادة بمعنى ان لكل جسيم هناك جسيم مضاد ، ان منذ اكتشاف الالكترون المضاد " البوزيترون " بواسطة العالم أندرسون باستخدام غرفة السحابة توالت الاكتشافات الاخرى مثل الميزون ميون المضاد فسمى ١٩٣٨ والميون المضاد في ١٩٤٢ والميون المتبادل المضاد في ١٩٥١ والميونات المضاد في ١٩٥٥ والبوزيترون المضاد في ١٩٦٣ وهكذا . ومعظم تلك الاكتشافات باستخدام الكاشفات البصرية مثل المستحلبات النورية وغرفة الفقاعة وغرفة الشرارة ولذلك لاتح مجال لا ي شك في صحتها .

Enrico FERMI

• - ايزيكو " فيرمى " (١٩٠١ - ١٩٥٤)

ولد في روما بإيطاليا وحصل على الدكتوراه من جامعة بيزا في ١٩٢٦ وفي عام ١٩٣٠ عين استاذاً للفيزياء النظرية بجامعة روما • وقبل بداية الحرب العالمية الثانية هاجر الى أمريكا ليشتغل وظيفة استاذ للفيزياء التجريبية بجامعة كولومبيا ثم جامعة شيكاغو •

وحصل على جائزة نوبل في ١٩٣٨ •

ويتميز فيرمى بأن أبحاثه اتسمت بالشمولية في علم الفيزياء مع العمق الفيزيائي في كل نفي مجال الفيزياء الاحصائية هناك الميكانيكا الاحصائية المعروفة باسمه (مشاركة مع ديبراك الذي توصل اليها بمفرده كذلك) • وفي مجال الفيزياء النظرية قائد الفريق الأمريكي الذي نتج في تصنيع اول قنبلة ذرية • وفي مجال فيزياء الجسيمات والاولية كان اول من أجرى التجارب الخاصة بالتفاعلات النووية للميونات الهيونية واول من أشار الى وجود ما يسمى الانانجسيمات الأولية الرنينية •

٦ - فرنر كارل " هايزنبرج " (١٩٠١ - ١٩٧٦)

Werner Karl HEISENBERG

ولد ببيلة فارنبرج بألمانيا وحصل على الدكتوراه من جامعة ميونخ تحت إشراف العالم سرفلد ثم اشتغل مع العالم ماكس بورن ثم مع العالم بوهر بمعهد " بكونبهاجن " • وعين استاذاً للفيزياء بجامعة برلين ثم رئيساً لمعهد ماكس بلانك ببرلين وجوتنجن •

وحصل على جائزة نوبل في ١٩٣٢ •

واهم أعماله هو صياغة ميكانيكا الكم بطريقة الصفوف وصياغة معادلة الحركة في ميكانيكا الكم التي تكافئ معادلة نيوتن في الميكانيكا الكلاسيكية وكذلك اكتشافه لمبدأ اللاتحديد وأدى الى اكتشافات تجريبية عديدة من أهمها عدم إمكانية تراكب جسيم

الالكترون داخل نواة الذرة كأحد المكونات الدائمة لها • الى ان تم بالفعل اكتشاف النيوترون وترسيخ المفهوم الصحيح للتركيب النووي في اطار قاعدة الحركة المغزلية النظرية والتي اوضحت الطريق الى اكتشاف العديد من الجسيمات الأولية والجسيمات الرنينية •

٧ - روبرت اندرو "ميليكان" (١٨٦٨ - ١٩٥٣) :

Robert Andrew MILLIKAN

ولد بمويسون بولاية الهوى بامريكا واصبح استاذاً للفيزياء التجريبية بجامعة شيكاغو • ولقد كان مثلاً في الصبر والاخلاص في اداء البحث العلمي ان كانت بعض التجارب تتطلب منه المكوث الى جهازه واستكمال القياسات التجريبية لمدة عشرين ساعة متواصلة حتى انتهت تلك المجهودات باكتشافه لفئة الالكترون كوحدة للشحنات الكهربائية غير قابلة للتجزئ وللان اوضحت التجارب الخاصة بجسيمات الكوارك لصحة هذا المفهوم •

وحصل على جائزة نوبل في ١٩٢٣ •

٨ - فولفجانج "باولي" (١٩٠٠ - ١٩٥٨) :

Wolfgang PAULI

ولد في فيينا بالنمسا وحصل على الدكتوراه في ١٩٢١ ثم عمل بعض الوقت مصح العالم بوهر بكونيغسهاجن ثم عين استاذاً للفيزياء النظرية بجامعة زيوريخ بسويسرا •

وحصل على جائزة نوبل في ١٩٤٥ •

ويعد باولي من أبرز علماء الفيزياء النظرية في القرن العشرين فهو أول من استخدم جبر المصفوفات لشرح الحركة المغزلية للالكترون وبهذا توصل الى تفسير العديد من الظواهر الخاصة بالاطياف الذرية والنظرية المرتبطة بالتفاعلات الكهرومغناطيسية •

كذلك فانه تحول الى اكتشاف مبدأ الاحتصاد المعروف باسمه والذي يُعتبر اساس لفهم العديد من الظواهر الفيزيائية التركيب الذري والتركيب النووي للمادة والسلوك الاحصائي للجسيمات الأولية * ومن اهمها الترتيب الدوري للعناصر تبعاً لاطصار مندليف *

٩ - ماكس كارل " بلانك " (١٨٥٨ - ١٩٤٧) Max Karl PLANCK

ولد ببلدة كمل بألمانيا ودرس في جامعتي جوتينغ وبرلين وحصل على الدكتوراه في ١٨٧٩ وعين استاذاً للفيزياء النظرية بجامعة برلين في ١٨٩٩ وهو نفس العام الذي وفق فيه لوضع التفسير الصحيح للطيف الاشعاعي الكمومي مستخدماً الفرضية من الاجسام ثامة السواد والذي عجز العديد من العلماء البارزين (امثال جينز وراسل وفين) من تفسيره * وقد بنى هذا التفسير على اساس التقدم بفكرة الكم الاشعاعي وهي الفكرة التي تعتبر اللبنة الاولى في البناء التكاملي لميكانيكا الكم ويعتبر بلانك استاذاً لجميع من تولوا صياغة هذه النظرية كما تعلمها الان مثل هايزنبرج وشرودنجر وورن وغيرهم *

وحصل بلانك على جائزة نوبل في ١٩١٩ *

واصل مشاركته في التقدم العلمي لهذه النظرية *

١٠ - سيسيل فرانك " بساول " (١٩٠١ - ١٩٦٩) Cecil Frank POWELL

ولد ببريستول بإنجلترا حيث اكمل دراسته لدرجة الدكتوراه في ١٩٢٧ ثم تدرج في وظائف الجامعة نفسها حتى اصبح استاذاً للفيزياء التجريبية في ١٩٤١ *

وحصل على جائزة نوبل في ١٩٥٠ *

ولقد وُفق باول في تطوير وتجهيز ما يعرف بالمستحلب الفوتوغرافي النوى والذي اوضح بما لا يدع للشك العلاقة الصحيحة بين الميونات والبيوتات وان الاخيرة هي كمات المجال النوى وبذلك تم تفسير القوى النووية على اساس صحيح بعد حوالي خمسة عشر عاما من التعاوب بين التفكير النظري والملاحظة التجريبية * كما وفق باول نفسه التعرف على توزيع العناصر المختلفة سواء الخفيفة منها والثقيلة في الاشعاعات الكونية الاولى ما اوضح الطريق لفهم العديد من ظواهر تلك الاشعاعات وخصوصا الانفاعلات النووية والكهرومغناطيسية لها انما مرورها في الغلاف الجوي *

وجميع تلك المشاهدات عكس مفهوم الكم الاشعاعي والحركة الموجية للجسيمات الاولى *

١- ارنست * رذرفورد * (١٨٧١ - ١٩٣٧) Ernest RUTHERFORD

ولد في بلدة نلسون بنيوزيلندا ودرس بها ثم رحل الى كندا حيث عمل استنادا للفيزياء التجريبية بجامعة ماكجيل بمونتريال * ثم عين استاذاً بجامعة مانفتسترسر بانجلترا في ١٩٠٧ وبعد ذلك شغل نفس المنصب الذي كان يشغله العالم "طومسون" مكتشف الالكترون بجامعة كامبردج *

وحصل على جائزة نوبل في ١٩٠٨ "في علم الكيمياء" *

وتتميز ابحاث رذرفورد التجريبية في مجال الفيزياء النووية والكيمياء الاشعاعية بمهارة فريدة وقدرة فائقة على تحليل المشاهدات التجريبية التي يقابلها * وهو الذي اوضح الطريق وأرسى الاساس للتركيب الذري والنوى الذي طوره بوهر ونقية تلاميذ رذرفورد وجند الباحثين الشبان لتطوير مفهوم الكم الذي قدمه بدنته حتى أخذت نظرية الكم الاطار الشامل لها *

١٢- ارفين "شرودينجر" (١٨٨٧ - ١٩٦١) : Erwin Schrodinger

ولد بفيينا بالنمسا وحصل على الدكتوراه من جامعتها في ١٩١٠ ثم شغل وظيفة استاذ الفيزياء بجامعة زيورخ بسويسرا وعمل خمس سنوات بعد ذلك بجامعة برلين قبل هجرته الى ايرلندا في ١٩٣٣ ليحل استاذاً في معهد البحوث المتقدمة بدبلن .
وحصل على جائزة نوبل في ١٩٣٣ .

وتعد بحوث شرودينجر الخاصة بالانثار الرياضي لنظرية ميكانيكا الكم هي النسخ الذي تبدأ عنه جميع الابحاث الخاصة بهذه النظرية لان " وينتشر لشرودينجر على انه " تيوتن العصر الحديث " .

١٣- ارنولد سومرفيلد " (١٨٦٨ - ١٩٥١) Arnold Sommerfeld

ولد بكوننجرج بالمانيا وشغل لعدة سنوات وظيفة استاذ للفيزياء بجامعة ميونيخ .

ولقد شارك بابحاثه في تقدم اسم ميكانيكا الكم وخصوصا فيما يتعلق بالتركيب الذري للمادة وادخل تطبيقات النظرية النسبية الخاصة في هذا الشأن مما ادى الى الهدى في استخدام مفهوم ثابت التركيب الدقيق في الفيزياء والذي يظهر في جميع المعالجات الرياضية للتفاعلات الكهرومغناطيسية بين الجسيمات الأولية والمادة .

١٤- جوزيف جون "طومسون" (١٨٥٦ - ١٩٤٠) Joseph John THOMSON

ولد في مانشستر بإنجلترا ودرس بها ثم عين استاذاً للفيزياء التجريبية بجامعة كامبردج والمعهد الملكي بلندن . وهو اول من قام بتعيين النية بين الشحنة والكتلة الالكترونية وتعرف على الالكترون كأحد الجسيمات الأولية الداخلة في بناء جميع

نظريات الراد المختلفة • كما انه اكتشف نتائج المتفر " النيون " •

وحصل على جائزة نوبل في ١٩٠٦ •

Hideki YUKAWA

١٨- هيديكو يوكاوا (١٩٠٧ - ١٩٨٠)

ولد ببلدة كيتو بـاليابان حيث حصل على الدكتوراه من جامعتها في ١٩٢٩ •

وحصل على جائزة نوبل في ١٩٤٩ •

وهو اول من فكر في تفسير التفاعلات بين الجسيمات النوية عن طريق تبادل جسيمات
الميزونات وذلك في ١٩٣٥ (ولكن لم تنجح نشرته مع الملاحظات التجريبية الا نسي
١٩٤٧ بعد اكتشاف الميزونات البوزونية التي تتميز بتفاعلاتها انوية مع الجسيمات
النوية) وهذا التفكير هو اساس لنظريات التفاعلات الكهرومغناطيسية بين الجسيمات
ذات الشحنة الكهربائية عن طريق تبادل كم المجال الكهرومغناطيسي " الفوتون " •

تذييل رقم (٣)

ثلاثة باسما "بعض الكتب المرتبطة بموضوع "ميكانيكا الكم" الجزء الاول

	Author	Title	Publisher	Year
1	Andrade, E.,	"An Approach to Modern Physics"	Doubleday	1957
2	Bates, D.,	"Quantum Theory 1"	Academic Press	1961
3	Baym, G.,	"Lectures on Quantum Mechanics"	Benjamin	1969
4	Bellman, R.,	"Perturbation Techni- ques in Mathematics, Physics and Enginee- ring"	Dover	1966
5	Bethe, H., Salpeter, E.,	"Quantum Mechanics for one-and two-electron Atoms"	Academic Press	1957
6	Elass, G.,	"Theoretical Physics"	Appleton	1962
7	Bohm, D.,	"Quantum Mechanics"	Prentice-Hall	1951
8	Born, M.,	"Atomic Physics"	Blackie	1962
9	Courant, R., & Hilbert, D.,	"Methods of Mathema- tical Physics"	Interscience	1953

	Author	Title	Publisher	Year
10	de Broglie, L.	"The Revolution in Physics"	Moonday	1953
11	Dirac, P.,	"Quantum Mechanics"	Oxford	1958
12	Dwight, H.,	"Tables of Integrals and other Mathemati- cal Data"	Macmillan	1961
13	Edmonds, A.,	"Angular Momentum in Quantum Mechanics"	Princeton	1957
14	Feynman, R., Leighton, R., Sands, M.,	"The Feynmann Lectures on Physics" IV	McGraw-Hill	1965
15	Flügge, S., (ed.)	"Practical Quantum Mechanics" 1,2,	Springer-Verlag	1971
16	Fredrick, U.,	"Theory of Linear Operators in Hilbert Space"	McGraw-Hill	1961
17	French, A.,	"Principles of Modern Physics"	Wiley	1958
18	Friedman, B.,	"Principles and Techniques of Applied Mathematics"	Wiley	1956

	Author	Title	Publisher	Year
19	Goldman, I., Krivchenkov, V.,	"Problems in Quantum Mechanics".	Pergamon	1961
20	Goldstein, H.,	"Classical Mechanics"	Addison-Wesley	1956
21	Grechko et al.,	"Problems in Theore- tical Physics"	Mir	1977
22	Hamers, H.,	"Advanced Quantum Chemistry"	Addison-Wesley	1965
23	Hartree, D.,	"The Calculation of Atomic Structure"	Wiley	1957
24	Hoffman, R.,	"The Strange Story of the Photon"	Dover	1959
25	Jamner, G.,	"The Conceptual Deve- lopment of Quantum Mechanics"	McGraw-Hill	1966
26	Kittel, C.,	"Introduction to Solid State Physics"	Wiley	1971
27	Kogan, V.,	"Problems in Quantum Mechanics"	Prentice-Hall	1963
28	Kraywicki, A.,	"Mathematics for Physicists"	Harper & Row	1967
29	Kuhn, H.	"Atomic Spectra"	Academic-Press	1969

	Author	Title	Publisher	Year
30	Loudon, R.,	"The Quantum Theory of Light"	Oxford	1973
31	Margenau, H. and Murphy, G.,	"Mathematics of Phys- ics and Chemistry"	Van Nostrand	1956
32	Menzel, D.,	"Mathematical Physics"	Dover	1961
33	Messiah, A.,	"Quantum Mechanics"	North-Holland	1970
34	Morse, P., and Feshbach, H.,	"Methods of Theoret- ical Physics"	McGraw-Hill	1966
35	Mott, N., and Massey, H.,	"The theory of Atomic Collisions"	Oxford	1965
36	Mott, N., and Sneddon, I.,	"Wave Mechanics and its Applications"	Oxford	1948
37	Park, D.,	"Introduction to Quantum Mechanics"	McGraw-Hill	1974
38	Perkins, D.,	"High Energy Physics"	Addison-Wesley	1987
39	Ramsey, N.,	"Molecular Beams"	Oxford	1963
40	Richtmyer, F., Kennard, E., and Cooper, J.,	"Introduction to Modern Physics"	McGraw-Hill	1969
41	Rose, M.,	"Elementary Theory of Angular Momentum"	Wiley	1957

Author	Title	Publisher	Year
42 Rossi, B.,	"Optics"	Addison-Wesley	1957
43 Saxon, D.,	"Elementary Quantum Mechanics"	Holden Day	1964
44 Schiff, L.,	"Quantum Mechanics"	McGraw-Hill	1968
45 Slater, J.,	"Quantum Theory of Atomic Structure", 1, 2	McGraw-Hill	1960
46 Taylor, P.,	"A Quantum Approach to the Solid State"	Prentice-Hill	1970
47 Tomonaga, S.,	"Quantum Mechanics"	North-Holland	1962
48 Wichmann, E.,	"Quantum Physics" Vol. 5 Berkeley Physics.	McGraw-Hill	1967

دار الحكيم للطباعة
٤٦ شارع النصارى - مدينة المنصورة
مخبره كبرى عيود - شبرا الخياط

رقم الايداع بدار الكتب ٥٢٠٢ / ١٩٨٩



دكتور محمد عبد الهادي كامل العدوى



دكتور عبد الرحمن فكرى

- * ولد بمدينة العياط بالجيزة فى عام ١٩٣٩
- * حصل على بكالوريوس علوم وتربية من كلية المعلمين بالقاهرة عام ١٩٦٠
- * حصل على دبلوم خاص فى التربية وعلم النفس من كلية التربية جامعة عين شمس بالقاهرة عام ١٩٦٤
- * حصل على بكالوريوس علوم الدرجة الخاصة فى الفيزياء من كلية العلوم جامعة القاهرة ١٩٦٨ بتقدير ممتاز مع مرتبة الشرف الأولى
- * التحق بدراسات الماجستير بجامعة القاهرة ثم لم يلبث بعد عام أن أوقدته جامعة عين شمس إلى موسكو حيث حصل على درجة الكانديدات نامتياز عام ١٩٧٣ من تلك الجامعة بروسيا
- * تدرج فى السلك الجامعى بجامعة عين شمس إلى الدرجة الحالية كأستاذ للفيزياء النظرية
- * من أهم مؤلفاته كتاب «كوكب ١٩٦٤ وكتاب «الفيزياء الم
- آخرين عام ١٩٧٩ ، وكتاب
- النسبية الخاصة» عام ١٩٨٠
- الزميل الحالي

- * ولد بالذريعة فى عام ١٩٣٢
- * حصل على بكالوريوس علوم - الدرجة الخاصة فى الفيزياء بتقدير ممتاز مع مرتبة الشرف الأولى عام ١٩٥٣ من كلية العلوم جامعة عين شمس
- * انتمت عام ١٩٥٦ الى جامعة بريستول «انجلترا» وحصل على الدكتوراه فى فيزياء الطاقة العالية عام ١٩٥٩
- * شغل وظيفة مدرس الفيزياء بكلية الهندسة جامعة عين شمس ١٩٥٩ ثم عين أستاذاً مساعداً فى نفس الكلية عام ١٩٦٦ ثم عين أستاذاً بنفس الكلية عام ١٩٧٩
- * أعير للعمل بكلية العلوم «جامعة الكويت» وكذلك إلى «جامعة أم القيسرى» بمكة المكرمة
- * شارك فى أبحاث علمية مع جامعات لندن وبركلى والمركز الاوروبى للبحوث النووية
- * له مؤلفات عدة فى فروع الفيزياء المختلفة أهمها كتب فى :
 - فيزياء المجرات والذنبات
 - الفيزياء الذرية
 - الفيزياء النووية
 - الديناميكا الحرارية